

I.

1)

$$U_{n+1} = U_n/2 + n/2\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}$$

$$V_n = \sqrt{2} * U_n - n$$

$$V_{n+1}/V_n = \sqrt{2} * U_{n+1} - (n+1) / (\sqrt{2} * U_n - n)$$

$$= \sqrt{2}(U_n/2 + n/2\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}) - (n+1) / (\sqrt{2} * U_n - n)$$

$$= (U_n/\sqrt{2} + n/2 + 1 - n - 1) / (\sqrt{2} * U_n - n)$$

$$= (U_n/\sqrt{2} - n/2) / (\sqrt{2} * U_n - n)$$

$$= (U_n/\sqrt{2} - n/2) * (1/\sqrt{2} * U_n - n)$$

$$= ((2 * U_n - \sqrt{2} * n) / 2\sqrt{2}) * (1/\sqrt{2} * U_n - n)$$

$$= ((\sqrt{2}(\sqrt{2} * U_n - n) / 2\sqrt{2}) * (1/\sqrt{2} * U_n - n)$$

$$= (V_n/2) * (1/V_n)$$

$$= 1/2$$

$$V_0 = \sqrt{2} * U_0 - 0$$

$$= \sqrt{2} * 2/3$$

$$= 2\sqrt{2}/3$$

$$V_n = V_0 * q^n$$

2)

$$V_n = (2\sqrt{2}/3) * (1/2)^n$$

$$(2\sqrt{2}/3) * (1/2)^n = \sqrt{2} * U_n - n$$

$$\sqrt{2} * U_n = n + ((2\sqrt{2}/3) * (1/2)^n)$$

$$U_n = n/\sqrt{2} + ((2\sqrt{2}/3) * (1/2)^n) / \sqrt{2}$$

$$U_n = n/\sqrt{2} + 2/3 * (1/2)^n$$

3)

Quand $n \rightarrow +\infty$, $(1/2)^n \rightarrow 0$ donc $(2/3) * 0 \rightarrow 0$. Et $n/\sqrt{2} \rightarrow +\infty$

Donc $U_n \rightarrow +\infty$ donc U_n est divergente

II.

$$U_n = \sqrt[n^4]{n^4 + 1} - n^2$$

$$U_0 = 1$$

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 1} - x^2$$

$$f'(x) = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 1}} - 2x$$

$$= 2x \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} - 1 \right)$$

$$x^2 - \sqrt{x^4 + 1} < 0$$

$$x^2 < \sqrt{x^4 + 1}$$

$$1 > \sqrt{x^4 + 1} / x^2$$

$$1 > x^2 / \sqrt{x^4 + 1}$$

Donc

	0	$+\infty$
$P'(x)$	-	-
$P(x)$		

$$n^4 + 1 > n^4$$

$$(n^4 + 1)^{1/2} > n^2$$

$$(n^4 + 1)^{1/2} - n^2 > 0$$

Donc $U_n > 0$ pour tout $n > 0$

De plus, $U_{10} = 0,005$ donc $(U_n)_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$

Donc U_n est majorée par 1 et minorée par 0

III.

$$U_n = v(n+1) - v(n)$$

$$U_0 = 1$$

$$f(x) = v(x+1) - v(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2v(x+1)} - \frac{1}{2v(x)}$$

$$x+1 > x$$

$$v(x+1) > v(x)$$

$$2v(x+1) > 2v(x)$$

$$\frac{1}{2v(x+1)} < \frac{1}{2v(x)}$$

	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	1	

$$n+1 > n$$

$$v(n+1) > v(n)$$

$$v(n+1) - v(n) > 0$$

Donc $U_n > 0$ pour tout n .

De plus, $U_{100} = 0,05$.

Donc U_n est majorée par 1 et minorée par 0

IV.

$$U_n = (a^n - b^n)/(a^n + b^n)$$

Si $a > b$, U_n est croissante.

Comme $a^n > b^n$, en $+\infty$, b^n est négligeable devant (a^n)

$$\text{Ainsi, } (U_n)_{n \rightarrow +\infty} = a^n/(a^n + b^n)_{n \rightarrow +\infty} = 0$$

Donc, si $a > b$, U_n est croissante et majorée. Donc elle est convergente

Si $a < b$, U_n est décroissante

Comme $a < b$, $a^n < b^n$ donc a^n est négligeable devant (b^n)

$$\text{Ainsi, } (U_n)_{n \rightarrow +\infty} = -b^n/(a^n + b^n)_{n \rightarrow +\infty} = 0$$

Donc, si $a < b$, U_n est décroissante et minorée donc convergente.

Si $a = b$,

$U_n = 0$ donc U_n est constante (et donc convergente)

V.

$$V_n = (U_0 + U_1 + \dots + U_n) / (n + 1)$$

Si U_n est constante, $V_n = (n \cdot (V_0)) / (n + 1)$

Donc, comme $n < n + 1$, $n / (n + 1)_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$

Donc, V_n est strictement décroissante et donc monotone.

Si U_n est strictement croissante, comme $U_{n+1} > U_n$ et $(n + 1) > n$, $V_{n+1} > V_n$. Donc V_n sera strictement croissante.

Si U_n est strictement décroissante, comme $U_{n+1} < U_n$ et $(n + 1) > n$, $V_{n+1} < V_n$. Donc V_n sera strictement décroissante.

Donc, si U_n est monotone, V_n sera monotone