

Support du cours **Nombres et Structures**

Chapitre 1 : logique et ensembles

1. Assertions et connecteurs

(1) définition : « une assertion est une proposition (qui dans sa forme peut être affirmative ou négative) que l'on avance et que l'on soutient comme vraie. »

(2*) exemples d'assertions.

Asserter c'est affirmer la vérité d'un énoncé. « Mange ta soupe » n'est pas une assertion. Contrairement à « mange ta soupe » une assertion peut être considérée comme vraie (V) ou fausse (F).

(3*) exemples d'assertions avec leurs valeurs de vérité.

Pour construire de nouvelles assertions, on représente les assertions par des lettres et on introduit des connecteurs qui représentent la négation, la conjonction et la disjonction.

(4*) notations de la négation, de la conjonction et de la disjonction.

On utilisera aussi des connecteurs déjà connus en math : l'implication notée soit $\rightarrow$ soit $\Rightarrow$ et l'équivalence notée soit $\leftrightarrow$ soit $\Leftrightarrow$.

2. Connecteurs, tables de vérité et tautologies

Les valeurs de vérité des nouvelles assertions formées avec ces connecteurs sont représentées dans des tableaux où « vrai » peut être noté soit 1 soit V et « faux » peut être noté soit 0 soit F. Ces tableaux s'appellent des tables de vérité, dans ces tables, les lettres autres que V et F représentent des assertions.

(5*) tables de vérité de $\neg \wedge \vee$.

(6) l'implication et l'équivalence peuvent s'exprimer grâce aux 3 connecteurs de base : $\neg \wedge \vee$.

$A \rightarrow B$ est une abréviation de $(\neg A) \vee B$.

$A \leftrightarrow B$ est une abréviation de $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

(7*) tables de vérité de $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$.

(8) propriétés fondamentales des connecteurs $\neg$ $\wedge$ $\vee$. Ces propriétés définies par des équations sont dans l'ordre de présentation : la commutativité, l'associativité, l'involution, l'idempotence, le tiers exclu et la non contradiction.

(9*) écriture des propriétés fondamentales des connecteurs $\neg$ $\wedge$ $\vee$.

Toutes ces équations peuvent se vérifier facilement à l'aide des tables de vérité.

(10*) tables de vérité de $A \vee \bar{A}$ et $A \wedge \bar{A}$.

(11) définition : une tautologie est une assertion vraie quelles que soient les valeurs de vérité de ses variables.

(12*) exemples de tautologies.

(13) vocabulaire : une antilogie est une assertion fausse quelles que soient les valeurs de vérité de ses variables.

(14*) lois de De Morgan, elles permettent de nier OU et ET.

$\text{NON}(A \text{ ET } B) = (\text{NON } A) \text{ OU } (\text{NON } B)$

$\text{NON}(A \text{ OU } B) = (\text{NON } A) \text{ ET } (\text{NON } B)$

(15*) négation de l'implication grâce aux lois de De Morgan.

(16) définition : l'assertion $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ est la contraposée de $A \Rightarrow B$. On montre facilement qu'elles sont équivalentes.

(17*) démonstration.

Quand on n'arrive pas à montrer $A \Rightarrow B$ on essaie de montrer $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ qui est parfois beaucoup plus facile.

(18*) exemple. Montrer que pour tout entier naturel on a : n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair.

3. Prédicats et quantificateurs

(19) définition : un prédicat à une variable est un énoncé $A(x)$ dépendant d'une variable x tel que, lorsqu'on substitue à cette variable un élément de certains ensembles on obtienne une assertion.

(20*) exemples de prédicats.

(21) quantificateurs. Avec un prédicat $A(x)$ on peut construire des assertions avec le quantificateur universel $\forall$ et le quantificateur existentiel $\exists$.

(22*) utilisation du quantificateur universel $\forall$.

(23*) lecture du quantificateur existentiel $\exists$.

(24*) exemples de phrases mathématiques avec $\exists$.

(25*) règles de négation des assertions (ou propositions) quantifiées.

(26*) exemples de négations de propositions quantifiées .

4. Opérations sur les ensembles

(27) Rappelons ici certaines propriétés de base pour des ensembles connus depuis longtemps : entiers naturels, entiers relatifs et rationnels.

Un entier naturel est un nombre de la suite 1,2,3,4,5...(pour une définition rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{N}$ cf. Axiomes de Peano).

Pour tout $z \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $z = n$ ou $z = -n$.

Tout nombre rationnel peut se mettre sous la forme p/q avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ (nous reverrons cette question plus en détail en arithmétique).

Les règles que l'on vient de voir en logique peuvent s'appliquer à la théorie des ensembles pour peu que l'on fasse une correspondance entre les notations logiques et ensemblistes.

(28*) correspondance entre les notations logiques et ensemblistes.

(29*) exemples de réécriture des équations vues en logique avec la notation ensembliste.

(30*) rappelons certaines propriétés des ensembles déjà connues concernant l'inclusion, la réunion, l'intersection et le complémentaire.

(31*) définition du complémentaire de A dans E : pour tout $A \subset E$ il existe un unique ensemble noté $\overline{A}$ tel que $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

(32*) définitions: différence et différence symétrique. Pour tous sous-ensembles A et B inclus dans E on note $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ la différence de A et B grâce à laquelle on peut définir la différence symétrique notée Δ .

(33) définition d'un recouvrement : soit E un ensemble et $R = \{X_i / 1 \leq i \leq n\}$ un ensemble de parties de E , on dit que R est un recouvrement de E ssi $\bigcup_{1 \leq i \leq n} X_i = E$.

(34*) exemple de recouvrement.

(35) définition : une partition est un recouvrement dont les éléments sont tous non vides et deux à deux disjoints.

(36*) on peut le noter comme suit :

(37*) exemple de partition

5. Ensembles finis, cardinal.

(38) définition : un ensemble E est un ensemble fini s'il existe un entier naturel n tel que E soit en bijection avec $\llbracket 1, n \rrbracket$. Il y a alors unicité d'un tel entier n , que l'on appelle cardinal de E et que l'on note $\text{card}(E)$ ou $\text{card}E$.

(39) on dit que deux ensembles sont équipotents s'ils ont le même cardinal.

Dans ce qui suit A, B, C, E seront des ensembles finis.

(40) produit cartésien ; le produit cartésien de A et B est défini par :

$A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ ET } b \in B\}$, (cette définition vaut dans le cas général).

Le cardinal de $A \times B$ vaut $\text{card}A \text{card}B$. Pour $n \geq 1$ on montre par récurrence sur n que $\text{card}A^n = (\text{card}A)^n$.

(41*) rappelons certaines relations sur les cardinaux de deux ou trois ensembles.

(42) Si $\text{card}E = n$, l'ensemble des parties de E , noté $\mathcal{P}(E)$, a pour cardinal 2^n .

(43*) exemple d'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Chapitre 2 : applications et relations

1. Définitions générales

(44) graphe. Soient E et F deux ensembles. On appelle graphe de E dans F tout sous-ensemble G de $E \times F$.

(45) graphe applicatif. Un graphe G de $E \times F$ est dit applicatif lorsque pour $x \in E$, il existe un unique y dans F tel que $(x, y) \in G$.

(46*) Définition et exemples. On appelle application de E dans F tout graphe applicatif G de $E \times F$.

2. Surjectivité, injectivité, bijectivité

(47) rappelons les définitions vues en *Fonctions et variations*. Une application f de E dans F est dite :

- 1) Injective lorsque pour tout $(x,y) \in E^2$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- 2) Surjective lorsque pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$
- 3) Bijective lorsqu'elle est injective et surjective.

(48*) exemple d'injection non surjective.

(49) l'injectivité et la surjectivité sont conservées par composition, c'est à dire que :

Soient $f : F \rightarrow G$ et $g : G \rightarrow H$ deux applications.

- 1) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- 2) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- 3) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

(50) définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. Pour tout y dans F, l'unique antécédent de y par f est noté $x = f^{-1}(y)$. L'application $f^{-1} : F \rightarrow E$ qui à y associe son unique antécédent dans E par f est appelée la bijection réciproque de f.

(51*) exemples de bijections réciproques.

3. Ensembles images, union et intersection.

(52*) soit $f : E \rightarrow F$ une application. Pour tout $A \subset E$, on note $f(A) = \{ f(x), x \in A \}$ l'image directe de A par f .

Exemples, soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, on a alors :

(53*) propriétés. Soit $f : E \rightarrow F$, pour toutes parties A et B de E on a :

4. Relations binaires sur un ensemble

(54) soit E un ensemble non vide. Une relation binaire sur E est la donnée d'une partie $\mathcal{R}$ de E^2 . C'est à dire que si $(x,y) \in \mathcal{R}$ on dit que x et y sont en relation et on note $x\mathcal{R}y$.

Exemples de relations binaires déjà connues : la relation « inférieur ou égal » $\mathcal{R} = " \leq "$ l'inclusion $\mathcal{R} = " \subset "$, l'égalité $\mathcal{R} = " = "$.

Commentaire. Qu'est-ce qui change par rapport à une application ? $\mathcal{R}$ est un graphe quelconque, il se peut que certains éléments de E ne soient en relation avec aucun autre, de même que certains éléments x de E peuvent appartenir à plusieurs couples (x, y_1) (x, y_2) etc.

(55) propriétés des relations binaires. Une relation binaire sur E est dite

- 1) Réflexive lorsque $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$
- 2) Symétrique lorsque $\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$
- 3) Antisymétrique lorsque $\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Leftrightarrow x = y$
- 4) Transitive lorsque $\forall (x,y,z) \in E^3, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

(56*) exemples de relations binaires.

(57) définition. On appelle relation d'ordre sur E toute relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive (RAT). On note traditionnellement $\preceq$ une relation d'ordre et on dit que $(E, \preceq)$ est un ensemble ordonné pour signifier que E est muni de la relation d'ordre $\preceq$.

$\preceq$ se lit « précède ou est égal à ».

Exemples de relations d'ordre déjà connues : la relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$, la relation d'inclusion $\subset$ sur l'ensemble des parties de E est une relation d'ordre. La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas réflexive.

Une relation d'ordre $\preceq$ sur E est dite totale lorsque $\forall (x, y) \in E^2$ $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. On dit alors que l'ensemble $(E, \preceq)$ est totalement ordonné. Cela veut dire que l'ordre $\preceq$ est total lorsque deux éléments quelconques de l'ensemble E sont toujours comparables au moyen de la relation $\preceq$.

(58*) exemples d'ordres.

(59) définition. Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné, F une partie non vide de E et $x \in E$ (on n'a pas nécessairement $x \in F$). On dit que :

- 1) x majore F lorsque $\forall f \in F, f \preceq x$,
- 2) x minore F lorsque $\forall f \in F, x \preceq f$,
- 3) x est le plus grand élément de F lorsque $x \in F$ et x majore F ,
- 4) x est le plus petit élément de F lorsque $x \in F$ et x minore F .

Remarque : l'unicité du plus grand (et du plus petit) élément de F est une conséquence immédiate de l'antisymétrie de $\preceq$.

(60*) exemples de majorants, minorants, plus petit et plus grand élément.

(61) définition. On dit qu'une partie de A non vide d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ admet une borne supérieure lorsque l'ensemble $\mathcal{M}(A)$ des majorants de A est non vide et admet un plus petit élément que l'on note $\sup(A)$.

En remplaçant « supérieure » par « inférieure », « $\mathcal{M}(A)$ des majorants » par « $\mathcal{m}(A)$ des minorants » et « plus petit élément que l'on note $\sup(A)$ » par « plus grand élément que l'on note $\inf(A)$ » on obtient la définition de la borne inférieure de A .

Si elle existe, $\sup(A)$ (resp. $\inf(A)$) est unique en tant que plus petit (resp. plus grand) élément d'un ensemble.

(62*) exemples de bornes supérieures et inférieures.

(63*) autres exemples dans $\mathcal{P}(E)$.

(64*) définition et exemples. On appelle relation d'équivalence sur E toute relation binaire réflexive symétrique et transitive.

(65) définition. Soit x un élément de E muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. On appelle classe d'équivalence de x , et on note $\bar{x}$, l'ensemble des éléments y en relation avec x , c'est-à-dire $y \in \bar{x}$ ssi $x\mathcal{R}y$.

On note $\bar{x} = \{ y \in E \mid x\mathcal{R}y \}$.

(66*) exemples de classes d'équivalence.

(67*) proposition : $x\mathcal{R}y$ ssi $\bar{x} = \bar{y}$, c'est-à-dire que deux éléments sont en relation ssi leurs classes d'équivalence sont égales.

Chapitre 3 : nombres complexes

1. Rappels

Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que celles que nous utilisons inconsciemment dans $\mathbb{R}$. Il est bon de les rappeler une fois encore.

(68) règles de calcul dans $\mathbb{C}$.

- 1) Commutativité de $+$ et $\times$
- 2) Associativité de $+$ et $\times$
- 3) 0 et 1 sont des éléments neutres (les seuls) pour $+$ et $\times$
- 4) Tout élément z admet un unique opposé noté $-z$
- 5) Tout élément z non nul admet un unique inverse noté $1/z$ ou z^{-1}
- 6) Distributivité de $\times$ par rapport à $+$

On résume ces propriétés en disant que $\mathbb{C}$ muni des opérations $+$ et $\times$ (que vous avez découvertes en terminale avec le nombre imaginaire i) possède une structure de corps, de la même façon que $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles a une structure de corps.

(69) définition. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple (x,y) de nombres réels tel que $z = x+iy$. Le nombre x est noté $\text{Re}(z)$ et appelé partie réelle de z ; le nombre y est noté $\text{Im}(z)$ et appelé partie imaginaire de z . L'écriture $z = x+iy$ s'appelle la forme algébrique de z .

Il va sans dire (mais ça va mieux en le disant) que la partie imaginaire d'un complexe est un réel et pas un imaginaire pur (c'est-à-dire un élément de $i\mathbb{R}$).

(70*) exemple. Calculons $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$ pour $z = (1 + i\sqrt{2})^3 + 1 + 8i$

(71) définition. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où x et y sont des réels. Le conjugué de z , noté $\bar{z}$, est le nombre complexe défini par $\bar{z} = x - iy$.

Une démonstration sans peine (laissée aux lectrices et lecteurs) donne les formules suivantes.

(72) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\text{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. Nous reverrons bientôt ces formules sous le nom de formules d'Euler.

(73) caractérisation des réels et des imaginaires purs.

- 1) $\forall z \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- 2) $\forall z \in \mathbb{C}, z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

(74) propriétés de la conjugaison.

- 1) $\forall z \in \mathbb{C}, \bar{\bar{z}} = z$ (involution)
- 2) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \overline{1/z} = 1/\bar{z}$
- 3) $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- 4) $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- 5) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}^*, \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$

(75) propriété. Pour tout nombre complexe z , $z\bar{z} \in \mathbb{R}^+$ et $z\bar{z} = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$.

(76) définition. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le module $|z|$ par la formule $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Si $z = a+ib$ avec a et b réels, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si $z = x \in \mathbb{R}$, le module de x est égal à sa valeur absolue et il y a « continuité » de la notation.

(77) module et multiplication.

- 1) Le module d'un produit de deux complexes est égal au produit des modules.
- 2) Le module de l'inverse est égal à l'inverse du module.
- 3) Le module d'un quotient est égal au quotient des modules.

A vous d'écrire les équations correspondantes.

- 1)
- 2)
- 3)

Avec un peu de pratique, l'utilisation des propriétés (73) à (77) devient tout aussi automatique que celle des règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

(78) forme polaire ou trigonométrique d'un complexe. Pour tout nombre complexe z , il existe θ réel tel que $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$. Une telle écriture est appelée forme polaire ou trigonométrique de z .

(79*) écrivons sous forme polaire les nombres $1+i$ et $-1/2 + i\sqrt{3}/2$.

(80*) notation. On pose $j = -1/2 + i\sqrt{3}/2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

2. Exponentielle d'un imaginaire pur.

(81) définition. Pour tout θ réel on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$. Grâce à cette notation, on peut écrire les formes polaires de façon condensée $z = |z| e^{i\theta}$, par exemple, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\bar{j} = j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

(82) conjugué de l'exponentielle d'un imaginaire pur. Pour tout θ réel, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

(83*) preuve.

En combinant (82) et les expressions (72) de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$, on obtient les formules d'Euler.

(84) formules d'Euler. Pour tout θ réel, $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

(85) règles de calcul.

- 1) $e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ (équation fonctionnelle de l'exponentielle)
- 2) $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ (formule de Moivre)
- 3) $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ (écriture de l'inverse)

(86*) application. Ecritures de j^2 .

3. Equations algébriques

(87) propriété. Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées complexes opposées.

(88*) méthode d'extraction des racines carrées d'un nombre complexe.

(89) l'extraction des racines carrées de $\omega \in \mathbb{C}$ en résumé. On recherche une racine carrée $z = x + iy$ de ω avec x et y réels.

- On commence par calculer x^2 et y^2 qui sont solutions du système linéaire suivant,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\omega) \\ x^2 + y^2 = |\omega| \end{cases}$$

- On en déduit 4 couples de solutions (x,y) , et comme $2xy = \operatorname{Im}(\omega)$, on ne retient que les deux couples (x,y) tels que le signe de xy soit celui de $\operatorname{Im}(\omega)$.

Commentaire : quand ω est réel cette méthode ne se justifie pas, si ω est positif les racines valent $\pm\sqrt{\omega}$, s'il est négatif elles valent $\pm i\sqrt{|\omega|}$.

(90) méthode de résolution des équations algébriques du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$:
 $az^2 + bz + c = 0$ où $a \in \mathbb{C}^*$.

- Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$
- Extraction d'une racine δ de Δ ($\delta^2 = \Delta$), cf. (89)
- Les racines de l'équation sont données par $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$

Remarques. Si $\Delta \neq 0$, peu importe la racine δ que l'on choisit puisque les 2 racines de Δ sont opposées et que les solutions s'écrivent avec $-\delta$ et $+\delta$. Si $\Delta = \delta = 0$, il n'y a qu'une racine, qui vaut $\frac{-b}{2a}$ comme c'était déjà le cas pour les équations du second degré à coefficients réels.

(91*) exemple. Résolvons $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$.

(92) définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une racine n -ième de l'unité est un nombre complexe tel que $z^n = 1$.

(93) racines n -ièmes de l'unité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe exactement n racines n -ièmes de l'unité qui sont les $\omega^k = e^{2ik\pi/n}$, avec $0 \leq k \leq n-1$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

(94*) exemple. Les racines cubiques et quatrièmes de l'unité.

(95*) remarque. Puisque pour tout $0 \leq k \leq n-1$, ω^k est de module 1 et d'argument $2k\pi/n$, les images des racines n -ièmes de l'unité sont réparties régulièrement sur le cercle unité i.e. elles forment un polygone régulier à n côtés en partant du point d'affixe 1. Illustration avec $n = 6$ et ω tel que $\omega^2 = j$.

(96) rappel : somme des $n-1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison ω et de premier terme 1. Soit ω un complexe différent de 1, on considère la suite de terme $u_k = \omega^k$ pour $k \geq 0$, d'après le cours du lycée $1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1-\omega^n}{1-\omega}$.

(97) somme des racines n -ièmes de l'unité. Soit $n \geq 2$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$, on a $1 + \dots + \omega^{n-1} = 0$.

(98*) preuve.

(99) périodicité. La suite $(\omega^m)_{m \in \mathbb{N}}$ est n -périodique car $\forall m \in \mathbb{N}$, $\omega^{m+n} = \omega^m \omega^n = \omega^m$. Par exemple, la suite $(j^m)_{m \in \mathbb{N}}$ commence par la séquence $1, j, j^2, 1, j, j^2, 1, j, j^2, 1, j, \dots$

(100) racines n -ièmes d'un nombre complexe non nul. Tout nombre complexe α non nul admet exactement n racines n -ièmes. Si z_0 désigne l'une quelconque d'entre elles, la liste des racines n -ièmes de α s'écrit $z_0, z_0\omega, \dots, z_0\omega^{n-1}$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$.

(101*) preuve.

(102) méthode : calcul des racines n-ièmes de $\alpha \neq 0$.

- Rechercher une racine n-ième particulière z_0 de α en écrivant α sous forme trigonométrique.
- L'équation $z^n = \alpha$ est équivalente à $z^n = z_0^n$, i.e. $\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$ donc $\frac{z}{z_0}$ est une racine n-ième de l'unité.
- Les racines n-ièmes de α sont donc $z_0, z_0\omega, \dots, z_0\omega^{n-1}$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$.

(103*) exemples. Déterminons les racines cubiques de -1 et les racines quatrièmes de 2i.