

## Triangle de Pascal

Démonstration: # nbr  $\mathbb{C}^*$  a exactement 2 racines carrées opposées

Soit  $x \in \mathbb{C}^*$ , résolvons  $z^2 = x \Leftrightarrow z^2 - x = 0$

Écrivons  $x$  sous la forme  $x = r e^{i\sigma}$  avec  $r > 0$  et  $\sigma \in \mathbb{R}$   
Il est clair que  $(r^{1/2} e^{i\sigma/2})^2 = r e^{i\sigma}$

$$(r^{1/2} e^{i\sigma/2})^2 = (r^{1/2})^2 (e^{i\sigma/2})^2 = r e^{i\sigma} = x$$

On utilise (encore!)  $a^2 - b^2$

$$z^2 - x = z^2 - (r^{1/2} e^{i\sigma/2})^2 = (z - r^{1/4} e^{i\sigma/4})(z + r^{1/4} e^{i\sigma/4})$$

Le complexe  $x$  non nul a dc 2 racines distinctes

$$\pm r^{1/4} e^{i\sigma/4}$$

Remq:  $r^{1/4} e^{i\sigma/4}$  n'est pas une forme polaire car  $-r^{1/4} < 0$

$$(-r^{1/4} e^{i\sigma/4}) = r^{1/4} e^{i\sigma/4} e^{i\pi} = r^{1/4} e^{i(\sigma/4 + \pi)}$$

Remq:  $m$  un réel  $> 0$  n'a qu'une racine carrée  
l'équat<sup>o</sup>  $x^2 = x$  pour  $x > 0$  a 2 racines opposées

$$\text{ex: } x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

l'équation  $x^2 = 5$  a bien 2 solutions opposées.

Méthode: rechercher les racines carrées de  $w \in \mathbb{C}^*$  par résolut<sup>o</sup> de  $(x+iy)^2 = w$

$$(x+iy)^2 = w$$

On résout grâce à un système linéaire plus une condition sur le signe de  $xy$ .

\* Le système linéaire:  $* |w| = |(x+iy)^2| = |x+iy|^2 = x^2 + y^2$   
 $* (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = w$   
donc  $x^2 + y^2 = \text{Re}(w)$

D'où un système linéaire entre  $x^2$ ,  $y^2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |w| \\ x^2 - y^2 = \text{Re}(w) \end{cases}$$

$$\text{La somme donne } 2x^2 = |w| + \text{Re}(w) \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} (|w| + \text{Re}(w))$$

$$\text{La différence donne } 2y^2 = |w| - \text{Re}(w) \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} (|w| - \text{Re}(w))$$

Sur les 4 couples possibles on choisit les 2 qui vérifient  
 $\text{Sgn}(2xy) = \text{Sgn}(xy) = \text{Sgn}(\text{Im}(w))$  car  $2xy = \text{Im}(w)$

Ex:  $w = 8 + 6i$   
 $|w| = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$   
 $x^2 - y^2 = \text{Re}(w) = 8$

$$\text{d'où le système linéaire } \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3 \\ 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1 \end{cases}$$

Suite démonstration système linéaire avec  $\begin{cases} x^2 + y^2 = |\omega| \\ x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\omega) \end{cases}$

On regarde le signe de  $xy$ ,  $\operatorname{Im}(\omega) = 6$  on doit avoir  $xy > 0$   
on retient les couples  $(3, 1)$  et  $(-3, -1)$

D'où les racines de  $\omega$   $3+i$  et  $-3-i$  qu'on note  $\pm(3+i)$

Vérification :

$$(3+i)^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$$

Exercice APPLICATION

Calculer les racines carrées de  $\omega = -5 + 12i$

$$* |\omega| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\omega) = -5$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 3 \end{cases}$$

On retient les couples  $(2, 3)$  et  $(-2, -3)$

$\omega$  a pour racine  $2+3i$  et  $-2-3i$  noté  $\pm(2+3i)$

$$\text{Verif. } (2+3i)^2 = \underbrace{4}_{x^2} + \underbrace{12i}_{2xy} - \underbrace{9}_{y^2} = -5 + 12i$$

$$* \omega = -4 - 3i$$

$$|\omega| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\omega) = -4$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ 2y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$xy < 0 \text{ de } \pm \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - 3i)$$

$$\omega = 1 - i$$

$$|\omega| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = \sqrt{2} + 1 \\ 2y^2 = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} \\ y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \end{cases}$$

$$\operatorname{Sign}(xy) = - \text{ car } \operatorname{Im}(\omega) = -1$$

$$\text{D'où les racines } \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \right)$$

Méthode de résolution de  $az^2 + bz + c$ ,  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  en résumé:

- \* calculer  $\Delta = b^2 - 4ac$
- \* calcul des racines carrées  $\pm \delta$  de  $\Delta$
- \* calcul des racines du polynôme avec les formules de Viète  

$$\frac{-b \pm \delta}{2a}$$

Exemple:  $z^2 - (1+i)z + 2(1+i) = 0$

$$\Delta = (1+i)^2 - 4 \cdot 2(1+i) = 1+2i-1-8-8i = -8-6i$$

On cherche les racines de  $8+6i$  qui sont  $\pm(3+i)$ , on les multiplie par  $i$  ( $i^2 = -1$ )

$$\pm i(3+i) = \pm(3i+i^2) = \pm(-1+3i)$$

On applique  $\frac{-b \pm \delta}{2a}$ ,  $z_1 = \frac{1+i-1+3i}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$

$$z_2 = \frac{1+i+1-3i}{2} = 1-i$$

### EXERCICE D'APPLICATION

★  $z^2 + (-1+i)z + 2+i = 0$

$a=1$   $b=(-1+i)$   $c=(2+i)$

$$\Delta = (-1+i)^2 - 4 \times 1 \times (2+i) = -8-6i$$

$$\delta = \pm(-1+3i)$$

$$z_1 = \frac{1-i+1-3i}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

$$z_2 = \frac{1-i-1+3i}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

★  $z^2 + (1-2i)z + 3(1-i) = 0$   
 $z^2 + (1-2i)z + (3-3i) = 0$

$b=(1-2i)$   $c=(3-3i)$

$$\Delta = (1-2i)^2 - 4 \times 1 \times (3-3i) = 1-4i-4-12+12i = -15+8i$$

$$\begin{aligned} (1-2i)^2 &= 1^2 - 2 \times 1 \times 2i + (2i)^2 \\ &= 1 - 4i + 4i^2 \\ &= 1 - 4i - 4 \\ &= -3 - 4i \end{aligned}$$

$$|\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 4 \end{cases}$$

$\text{Im}(\Delta) > 0$  donc  $xy > 0$

$$\delta = \pm(1+4i)$$

$$(1+4i)^2 = 1+8i-16 = -15+8i$$

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-1+2i+1+4i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$$

$$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-1+2i-1-4i}{2} = \frac{-2-2i}{2} = -1-i$$

## Linéarisation de $\cos^2 x$

$$\text{Euler: } \begin{cases} e^{i\sigma} = \cos \sigma + i \sin \sigma \\ e^{-i\sigma} = \cos \sigma - i \sin \sigma \end{cases}$$

Somme, les  $\sin \sigma$  s'annulent  $e^{i\sigma} + e^{-i\sigma} = 2 \cos \sigma$

$$\cos \sigma = \frac{e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}}{2}$$

Difference, fait disparaître les  $\cos \sigma$   $e^{i\sigma} - e^{-i\sigma} = 2i \sin \sigma$

$$\sin \sigma = \frac{e^{i\sigma} - e^{-i\sigma}}{2i}$$

Linéariser  $\cos^2 x$

\* on développe  $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2$  avec le triangle de Pascal. 1 2 1

\* on regroupe les termes conjugués par paires

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2 \times 2} (e^{i2x} + 2e^{i(x-x)} + e^{-i2x}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} + \frac{2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2x + 1) \end{aligned}$$

### EXERCICE APPLICATION

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{-1}{2 \times 2} (e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}) \\ &= -\frac{1}{2} (\cos 2x - 1) = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} (e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} + \frac{3e^{ix} + 3e^{-ix}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} (\cos 3x + 3\cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{(2i)^2} (e^{i3x} - 3e^{2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2x} - e^{-i3x}) \\ &= \frac{-1}{4 \cdot 2i} (e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}) \\ &= \frac{-1}{4} (\sin 3x - 3(e^{ix} - e^{-ix})) \\ &= \frac{-1}{4} (\sin 3x - 3\sin x) \\ &= +\frac{1}{4} (3\sin x - \sin 3x) \end{aligned}$$

## Règles de calcul de l'exponentielle $e^{i\sigma}$ avec $\sigma \in \mathbb{R}$

1)  $e^{i\sigma} e^{i\tau} = e^{i(\sigma+\tau)}$

2)  $(e^{i\sigma})^n = e^{in\sigma}$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  *faire*

3)  $\frac{1}{e^{i\sigma}} = e^{-i\sigma}$

Exo 1) Sachant que  $e^{i\sigma} = \cos \sigma + i \sin \sigma$  montré que pr  $\forall \sigma \in \mathbb{R}$   
on a :  $e^{-i\sigma} = \overline{e^{i\sigma}}$

$$e^{-i\sigma} = \cos \sigma - i \sin \sigma = \overline{e^{i\sigma}}$$
$$= \overline{\cos \sigma + i \sin \sigma}$$

Soit  $\beta = \frac{1+i\sqrt{3}}{-1-i}$

a) Calculer  $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$  et en déduire la forme exponentielle de  $1+i\sqrt{3}$

b) même quest° pr  $-1-i$

c) Calculer la forme exponentielle de  $\beta$

d) En déduire  $\beta^n, n \in \mathbb{N}$  grâce à *faire*

a)  $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

b)  $-1-i = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\frac{-1-i}{|-1-i|} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$-1-i = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

Tenir sous la forme *ou algébrique* cartésienne  $z = a+ib$

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

$$e^{i\frac{7\pi}{6}} = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$$

$$e^{i\frac{11\pi}{6}} = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$$

$$c) \beta = \frac{1+i\sqrt{3}}{-1-i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{4})} = \sqrt{2} e^{i(\frac{1}{3} - \frac{5}{4})}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{4\pi}{12} - \frac{15\pi}{12})}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{11\pi}{12}}$$

être sous forme  $\lambda e^{i\theta}$ , avec  $\lambda > 0$  et  $\theta \in [0; 2\pi]$

Radiant

•  $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$$|-\sqrt{2} - i\sqrt{2}| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$2 \left( \frac{-\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \\ = 2 e^{i \frac{5\pi}{4}}$$

•  $-\sqrt{3} + i$

$$|-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$2 \left( \frac{-\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\ = 2 e^{i \frac{5\pi}{6}}$$

•  $3\sqrt{3} - 3i$

$$|3\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6$$

$$6 e^{i \frac{4\pi}{6}} = 6 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 6 \cos \frac{4\pi}{6} + i \sin \frac{4\pi}{6}$$

•  $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

$$| | = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right) = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

DIVISION EUCLIDIENNE

Soit  $a$  un entier et  $b$  un entier strictement positif alors il existe un unique couple  $(q, r)$  d'entiers tel que :  $a = bq + r$  &  $0 \leq r < b$

$a$ : le dividende  $b$ : diviseur  $q$ : quotient  $r$ : reste. **Rmq:**  $bq < a$   
 $bq = a - r \leq a$

ex.  $\star a = 19$   $b = 3$

$a = bq + r$  s'écrit  $19 = 3 \times 6 + 1$   $r = 1$ ;  $0 \leq 1 < 3$ .

$\star a = 54$   $b = 13$

$a = bq + r$  s'écrit  $54 = 13 \times 4 + 2$   $r = 2$ ;  $0 \leq 2 < 13$ .

$\star a = 147$   $b = 5$

$147 = 5 \times 29 + 2$   $0 \leq 2 < 5$

$\star a = -10$   $b = 3$

$-10 = 3 \times -4 + 2$   $r = 2$ ;  $0 \leq 2 < 3$

$\star a = 1$   $b = 50$

$1 = 50 \times 0 + 1$   $r = 1$ ;  $0 \leq 1 < 50$

$\star a = -15$   $b = 50$

$-15 = 50 \times -1 + 35$   $r = 35$ ;  $0 \leq 35 < 50$

$\star a = -13$   $b = 2$

$-13 = 2 \times -7 + 1$   $r = 1$ ;  $0 \leq 1 < 2$

PGCD de 2 nbs naturels

Notons  $D_n$  l'ensemble des diviseurs de  $n$  pour lequel le reste est nul.

$D_6 = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

$D_6 \cap D_8 = \{\pm 1; \pm 2\}$

$D_8 = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

$\text{PGCD}(8, 6) = 2$ .

On notera  $\text{PGCD}(8, 6) = 8 \wedge 6 = 2$

$D_{10} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$

$D_{10} \cap D_{45} = \{\pm 1; \pm 5\}$

$D_{45} = \{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 9; \pm 15; \pm 45\}$

$10 \wedge 45 = 5$

Calcul de  $a \wedge b$  par l'algorithme d'Euclide

Principe: La première étape consiste à diviser  $a$  par  $b$ , pour passer à la deuxième étape on pose la division du diviseur par le reste, on effectue puis on recommence jusqu'à obtenir un reste nul.

Le PGCD est le dernier reste non nul, c'est à dire le dernier diviseur.

a) 
$$\begin{array}{r} 6 \\ 36 \overline{) 248} \\ \underline{216} \phantom{0} 1 \\ 32 \phantom{0} 36 \\ \underline{32} \phantom{0} 8 \\ 8 \phantom{0} 32 \\ \underline{32} \phantom{0} 0 \end{array}$$

$248 \wedge 36 = 4$

b) 
$$\begin{array}{r} 4 \\ 27 \overline{) 131} \\ \underline{108} \phantom{0} 1 \\ 23 \phantom{0} 27 \\ \underline{23} \phantom{0} 5 \\ 4 \phantom{0} 23 \\ \underline{20} \phantom{0} 3 \\ 3 \phantom{0} 3 \\ \underline{3} \phantom{0} 0 \end{array}$$

$27 \wedge 131 = 5$

$$\begin{array}{r}
 4 \\
 84 \overline{) 375} \\
 \underline{336} \phantom{0} \\
 39 \phantom{0} \\
 \underline{78} \phantom{0} \\
 0
 \end{array}$$

$$84 \times 3 = 252$$

$$84 \times 4 = 336$$

$$84 \times 5 = 420$$

$$482 \times 2 = 964$$

$$3 = 146$$

Exos Calculer  $482 \text{ r } 1180$  avec l'algorithme d'Euclide simple.

$$\begin{array}{r}
 482 \overline{) 1180} \\
 \underline{964} \phantom{0} \\
 216 \\
 \underline{168} \phantom{0} \\
 48 \\
 \underline{48} \phantom{0} \\
 0
 \end{array}$$

PGCD  $\rightarrow$  48

# NOMBRE COMPLEXE

Binôme de Newton

Un nbr complexe sous forme algébrique se note  $z = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  réels. On peut faire tous les calculs comme dans  $\mathbb{R}$  en ajoutant simplement la règle  $i^2 = -1$ .

Calculer les produits suivants.

$$\begin{aligned} \text{a) } (2-3i)(3+4i) &= 6 + 8i - 9i - 12i^2 \\ &= 6 + 8i - 9i + 12 \\ &= 18 - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (4+3i)^2 &= 16 + 2 \times 4 \times 3i + (3i)^2 \\ &= 16 + 24i - 9 \\ &= 7 + 24i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (6+5i)(6-5i) &= (6)^2 - (5i)^2 \\ &= 36 + 25 \\ &= 61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (-2+3i)(4-2i) &= -8 + 4i + 12i - 6i^2 \\ &= -8 + 16i + 6 \\ &= -2 + 16i \end{aligned}$$

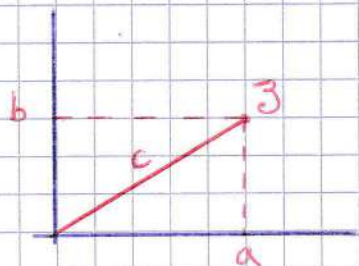
$$\begin{aligned} \text{b) } (1+3i)(2-5i) &= 2 - 5i + 6i - 15i^2 \\ &= 2 + i + 15 \\ &= 17 + i \end{aligned}$$

## Conjugué et module

Si  $z = a + ib$  est  $\bar{z} = a - ib$

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2, \text{ le module est } \geq 0 \text{ d'où } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex a) } z_a &= 3 + 4i \\ \|z_a\| &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } z_b &= 12 + 5i \\ \|z_b\| &= \sqrt{12^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } z_c &= 8 + 6i \\ \|z_c\| &= \sqrt{8^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } z_d &= 1 + 4i \\ \|z_d\| &= \sqrt{1^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } z_e &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \|z_e\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } z_f &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \\ \|z_f\| &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

## Division de 2 complexes

ou comment mettre une f. act° = 1

$\frac{a+ib}{c+id}$  sous forme algébrique?

En multipliant le numérateur et le dénominateur par  $c-id$ , le dénominateur devient RÉEL et devient  $c^2 + d^2$

$$\text{a) } \frac{3+2i}{5-i} = \frac{3+2i}{5-i} \times \frac{5+i}{5+i} = \frac{15+3i+10i-2}{5^2 + (-1)^2} = \frac{13+13i}{26}$$

$$\text{b) } \frac{3}{i} = \frac{3}{i} \times \frac{-i}{-i} = -3i \quad \text{c) } \frac{6+2i}{1+2i} = \frac{6+2i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{6-12i+2i+4}{5} = \frac{10-10i}{5} = 2-2i$$

$$\text{d) } \frac{1-3i}{1+i} = \frac{1-3i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i-3i-3}{2} = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i$$

Exo sur  $ax^2+bx+c$  avec  $\Delta < 0$

- factoriser  $x^2 - (i\sqrt{5})^2$  grâce à  $a^2 + b^2$
- En déduire les solutions de l'équation  $x^2 + 5 = 0$
- calculer le discriminant de  $x^2 + x + \frac{3}{2}$
- résoudre  $S^2 = \Delta$  avec  $S$  inconnue complexe
- Appliquer  $\frac{-b+S}{2a}$  et  $\frac{-b-S}{2a}$  pour trouver les solutions de  $x^2 + x + \frac{3}{2} = 0$

a)  $x^2 - (i\sqrt{5})^2 = (x^2 + i\sqrt{5})(x^2 - i\sqrt{5})$

b)  $x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + i\sqrt{5})(x^2 - i\sqrt{5}) = 0$   
 $x \in \{-i\sqrt{5}; i\sqrt{5}\}$

c)  $\Delta = 1 - 4 \cdot \frac{3}{2} = -5$

d)  $S^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow S \in \{i\sqrt{5}; -i\sqrt{5}\}$

e) Les formules  $\frac{-b \pm S}{2a}$   $x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{5}}{2}$   $x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{5}}{2}$

Les racines sont conjuguées

Exo Trigoo Calculer les racines de  $x^2 + x + 1$  à l'aide de la formule  $\frac{-b \pm S}{2a}$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1$   
 $= -3$

$S^2 = -3$

$S^2 + 3 = 0$

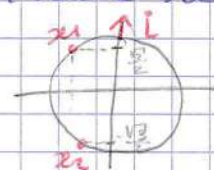
$x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3})$

$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

$x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

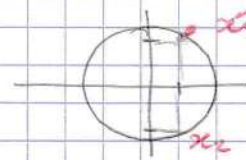
$x_2 = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$



Coefficients du polynôme sont RÉEL

Les racines ne sont pas RÉEL, elles sont conjuguées

$x^2 - x + 1 = 0$



$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1)$

$= 1 - 4$

$= -3$

$S^2 = -3$

$x_1 = \frac{+1 + i\sqrt{3}}{2}$

$x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{i}{\sqrt{2}} + \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = i$

$\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{i\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{-i\sqrt{3}}{2} + \frac{-3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

## IDENTITE DE BEZOUT

Soit  $(a, b)$  2 entiers, alors il existe 2 entiers  $u$  et  $v$  tel que  
 $au + bv = a \wedge b$

Ex:  $3 \wedge 2 = 1$ , on recherche des relations  $3u + 2v = 1$

$$3(1) + 2(-1) = 1$$

$$3(-1) + 2(2) = 1$$

On a trouvé 2 couples  $(u, v)$ :  $(1; -1)$  &  $(-1; 2)$

Le couple  $(u, v)$  n'est donc pas unique, il y en a même une inf.

Ex: Trouver une paire de bezouts pour les couples  $(a, b)$  suivants:

a)  $(4, 3)$   $4 \wedge 3 = 1$   $4(1) + 3(-1) = 1$   $4(-2) + 3(3) = 1$

b)  $(7, 5)$   $7 \wedge 5 = 1$   $7(-2) + 5(3) = 1$   $(-2, 3)$   $7(3) + 5(-4) = 1$   $(3, -4)$

c)  $(8, 6)$   $8 \wedge 6 = 2$   $8(1) + 6(-1) = 2$   $(1, -1)$

d)  $(45, 18)$   $45 \wedge 18 = 3$   $45(1) + 18(-2) = 3$

## EUCLEDE ETENDU

Calculons un couple de bezouts pour  $(226, 18)$

$$\begin{array}{r}
 18 \overline{) 226} \\
 \underline{216} \phantom{0} \\
 10 \phantom{0} \\
 \underline{10} \phantom{0} \\
 8 \phantom{0} \\
 \underline{8} \phantom{0} \\
 0
 \end{array}$$

12 q2  
1 q3  
1 q4  
2 q5

| INDICE | u  | v  | q  |
|--------|----|----|----|
| 0      | 1  | 0  | -  |
| 1      | 0  | 1  | -  |
| 2      | 1  | 0  | 12 |
| 3      | -1 | 1  | 1  |
| 4      | 2  | -1 | 1  |
| 5      | -2 | 2  | 4  |

on s'en fait

## Règle d'utilisation du tableau:

La valeur 2 lignes au-dessus moins la valeur de la ligne considérée fois la valeur de la ligne juste au-dessus.

Exo: Calculer  $30 \wedge 7$  par Euclide. Faire le tableau couple de bezouts.

$$\begin{array}{r}
 7 \overline{) 30} \\
 \underline{28} \phantom{0} \\
 2 \phantom{0} \\
 \underline{2} \phantom{0} \\
 0
 \end{array}$$

4 q2  
3 q3  
2 q4  
1 q5

| indice | u  | v   | q |
|--------|----|-----|---|
| 0      | 1  | 0   | / |
| 1      | 0  | 1   | / |
| 2      | 1  | -4  | 4 |
| 3      | -3 | 13  | 3 |
| 4      | 7  | -25 | 2 |

9

|    |   |   |     |
|----|---|---|-----|
| 27 | 2 | = | 54  |
|    | 3 | = | 81  |
|    | 4 | = | 108 |
|    | 5 | = | 135 |

## LES RECURRENCES LINEAIRES

Equation de recurrence lineaire d'ordre 2.

On cherche la suite a valeurs complexes notée  $(u_n)$  qui verifie l'equat<sup>n</sup>:

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

Et la condition initiale  $u_0, u_1$ Les valeurs  $u_0$  et  $u_1$  sont fixées par l'énoncéMéthode de Résolution.

1. On forme le polynôme caractéristique

$$* P = x^2 - \alpha x - \beta$$

2. On calcule son  $\Delta$  et selon  $\Delta$  il y aura 3 formes pour les suites de solutions.\*  $\Delta = 0$ ,  $u_n = (A + nB) r_0^n$  où  $r_0$  est la racine double.\*  $\Delta \neq 0$  et  $(u_n)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ 

$$u_n = (A r_1^n + B r_2^n) \quad r_1, r_2 \text{ les racines de } P$$

\*  $\alpha, \beta$  réels et  $\Delta < 0$ 

$$u_n = r^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta) \quad \text{où les racines de } P \text{ sont } r e^{i\theta} \text{ et } r e^{-i\theta}$$

Car complexe  $(u_n)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ 

$$u_{n+2} = (1+i) u_{n+1} - 2(1+i) u_n, \quad \text{C.I.} \quad u_0 = 0 \quad u_1 = 1$$

Le caractéristique est  $x^2 - (1+i)x + 2(1+i)$ Les racines sont  $r_1 = 2i$   $r_2 = 1-i$  les solutions sont de la forme  $(A(2i)^n + B(1-i)^n)$  avec  $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ 

$$u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \text{ donne } \begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = 2iA + (1-i)B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 1 = -2iB + (1-i)B \\ 1 = (1-3i)B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ B(1-3i) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow B = \frac{1}{1-3i} = \frac{1+3i}{10} = -A$$

$$u_n = -\frac{1+3i}{10} (2i)^n + \frac{1+3i}{10} (1-i)^n$$

$$u_n = \frac{1+3i}{10} (-(2i)^n + (1-i)^n)$$

## EXERCICE APPLICATION

$$u_{n+2} = -(4+3i)(u_{n+1} - (1+5i)u_n), \text{ C.I. } u_0 = 0, u_1 = -2-i$$

$$x^2 + (4+3i)x + (1+5i)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (4+3i)^2 - 4(1)(1+5i)$$

$$= 4^2 + 2 \times 4 \times 3i + (3i)^2 - 4 - 20i$$

$$= 16 + 24i - 9 - 4 - 20i$$

$$= 3 + 4i$$

$$|\Delta| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}$$

Les racines sont  $2+i$  et  $-2-i$

$$\delta = \pm 2+i$$

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-4 - 3i + 2 + i}{2} = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

$$z_2 = \frac{-b - \delta}{2} = \frac{-4 - 3i - 2 - i}{2} = \frac{-6 - 4i}{2} = -3 - 2i$$

$$r_1 = -3 - 2i \quad r_2 = -1 - i$$

Les solutions sont sous la forme  $A(-3-2i)^n + B(-1-i)^n$   $A, B \in \mathbb{C}^*$

$u_0 = 0$  et  $u_1 = -2-i$  donne

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ -2-i = A(-3-2i) + B(-1-i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B \\ -2-i = -(-3-2i)B + B(-1-i) \\ = -2-2i = A(2+i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -A \\ A = -1 \end{cases}$$

$$u_n = -(-1-i)^n + (-3-2i)^n$$

Cas  $\Delta = 0$ 

La méthode est la même, mais pas la forme de la solution qui est  $(A+nB)r_0^n$

$$\begin{cases} u_0 = A \\ u_1 = (A+B)r_0 \end{cases}$$

$$u_{n+2} = 2(1+i)u_{n+1} - 2iu_n \quad u_0 = 2 \quad u_1 = 3$$

$$P = x^2 - 2(1+i)x + 2i \quad \Delta = 4(1+i)^2 - 8i = 4(1+2i-1-2i) = 0$$

$$r_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

C.I.  $\begin{cases} u_0 = 2 = A \\ u_1 = 3 = (2+B)(1+i) \end{cases} \Leftrightarrow B = \frac{3}{1+i} - 2 = \frac{3-2-2i}{1+i}$

$$B = \frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1-2i)(1-i)}{2} = \frac{1-i-2i-2}{2} = \frac{-1-3i}{2}$$

$$u_n = (A+nB)r_0^n = \left(2 + n \frac{(-1-3i)}{2}\right) (1+i)^n$$

EXERCICE D'APPLICATION

Trouver la suite  $u_n$  qui vérifie  $u_{n+2} = (4-2i)u_{n+1} + (-3+4i)u_n$  et C.I.  $u_0 = \frac{1}{2} \quad u_1 = 2-i$

$$P = x^2 + (-4+2i)x - (3-4i)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (4-2i)^2 - 4(-3+4i) \\ &= 16 - 16i - 4i^2 - 12 + 16i \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4(2-i)^2 - 4(3-4i) \\ &= 4(4-4i-1) - 4(3-4i) \\ &= 4(3-4i-3+4i) = 0 \end{aligned}$$

$$r_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2(2-i)}{2} = 2-i$$

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} = A \\ u_1 = 2-i = (A+B)(2-i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ A+B = 2-i \end{cases} \quad A = B = \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2} (1+n) (2-i)^n$$

$$u_{n+2} = 6i u_{n+1} + 9u_n$$

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 1$$

$$x^2 - 6ix - 9$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (6i)^2 - 4(-9) \\ &= -36 + 36 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{6i}{2} = 3i$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 = A \\ u_1 = 1 = (A+B)\alpha \\ \quad = (1+B) - 3i \end{cases}$$

$$B = \frac{1}{-3i} - 1 = \frac{1}{-3i} - \frac{1-3i}{-3i} = \frac{-i(1-3i)}{3} = \frac{-i+3}{3} = \frac{3-i}{3}$$

$$u_n (A+B)\alpha^n = \left(1 - n \cdot \frac{i+i}{3}\right) (3i)^n = \frac{3-i}{3}$$

Car Cos/Sin.  $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$

$\alpha$  et  $\beta$  sont ds  $\mathbb{R}$  et  $\Delta \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta < 0$

Les solutions sont de la forme :

$$u_n = (A \cos n\sigma + B \sin n\sigma) r^n$$

où  $r$  est le module des racines  
 $\sigma$  est un argument de l'une des racines.

Exemple:  $u_{n+2} = -2\sqrt{3} u_{n+1} - 4u_n$ ,  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 2$

$$P = x^2 + 2\sqrt{3}x + 4 \quad \Delta = 12 - 16 < 0 \quad \Delta = -4 \quad f = \pm 2i$$

$$r_1 = \frac{-2\sqrt{3} + 2i}{2} = -\sqrt{3} + i, \quad r_2 = -\sqrt{3} - i$$

Prenons un argument entre 0 et  $\pi$ .

$$|-\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2 \quad r_1 = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$$

$$r_1 = 2 e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Les solutions sont de la forme

$$(A \cos n \frac{5\pi}{6} + B \sin n \frac{5\pi}{6}) \cdot 2^n$$

$$\begin{cases} u_0 = A \\ u_1 = 2(A \cos \sigma + B \sin \sigma) \end{cases} \quad \Delta n = 1$$

$$\begin{cases} 0 = A \\ 2 = 2B \sin \frac{5\pi}{6} = 2 = 2B \frac{1}{2} \Leftrightarrow B = 2 \end{cases}$$

Solution:  $u_n = 2^n \cdot 2 \sin n \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow 2^{n+1} \sin n \frac{5\pi}{6}$

Exo Trouver la suite qui vérifie

CHAPITRE 13

$$u_{n+2} = -3\sqrt{2} u_{n+1} - 9 u_n \quad \text{CI } u_0 = 1 \quad u_1 = \sqrt{2}$$

$$P = x^2 + 3\sqrt{2}x + 9$$

$$\Delta = (3\sqrt{2})^2 - 4 \times 9 \\ = 18 - 36 \\ = -18$$

$$\delta = \pm i3\sqrt{2} \quad (i3\sqrt{2})^2 = -18$$

$$r_1 = \frac{-3\sqrt{2} + i3\sqrt{2}}{2} = 3 \left( \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad r_2 = 3 \left( \frac{-\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$r_1 = 3 e^{i \frac{3\pi}{4}}$$

Les solutions sont sous la forme -

$$(A \cos n \frac{3\pi}{4} + B \sin n \frac{3\pi}{4}) 3^n$$

$$\begin{cases} u_0 = A = 1 \\ u_1 = \sqrt{2} = 3 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + B \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{cases}$$

$$1 = \left( -\frac{1}{2} + \frac{B}{2} \right) \Rightarrow \frac{2}{3} = - + B$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} = B$$

$$\text{Solution: } u_n = 3^n \left( \cos n \frac{3\pi}{4} + \frac{5}{3} \sin n \frac{3\pi}{4} \right)$$

Linéarisation  $\sin^5 x$

$$\text{Coef} \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

$$\sin^5 x = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5 = \frac{-1}{2^5} \left( \begin{array}{l} e^{i5x} - 5e^{i4x}e^{-ix} + 10e^{i3x}e^{-i2x} - 10e^{i2x}e^{-i3x} + 5e^{ix}e^{-i4x} - e^{-i5x} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2^5} \left( e^{i5x} - 5e^{i4x}e^{-ix} + 10e^{i3x}e^{-i2x} - 10e^{i2x}e^{-i3x} + 5e^{ix}e^{-i4x} - e^{-i5x} \right)$$

$$= \frac{1}{2^5} \left( e^{i5x} - 5e^{i3x} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-i3x} - e^{-i5x} \right)$$

$$= \frac{1}{16} (\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$$

## Equation de Diophante de premier degré

On va apprendre une méthode pour résoudre les équations du type:  
 $6x + 33y = 9$  (E) avec  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ("z pour z")

### Méthode de résolution

1. On divise par le PGCD des coefficients ici  $6 \wedge 33 = 3$

$$\rightarrow 2x + 11y = 3 \text{ (E')}$$

2. On cherche un couple de coefficients de Bezout 1 PGCD  $2 \wedge 11 = 1$   
Pour 2 et 11, c'est dire  $u$  et  $v$  tels que  $2u + 11v = 1$

Si  $v = -1$  on obtient  $2u = 12 \Leftrightarrow u = 6$ ,  $(u, v) = (6, -1)$  est un couple de Bézouts.

3. On multiplie le couple par le membre de droite de (E')

$$3(6, -1) = (18, -3) \text{ ce qui nous donne une solution particulière}$$

4. On résout  $2x + 11y = 0$  (H);  
- changeant l'ordre des coeffs  
- mettant un signe "-"  
- multipliant par  $k \in \mathbb{Z}$  quelconque

$$2(-11k) + 11(2k) = 0$$

$$\text{ou } 2(11k) + 11(-2k) = 0$$

5. Il ne reste qu'à faire la somme des 2 couples, le premier solution de (E'), la deuxième solution de (H)

$$(18, -3) + (-11k, 2k) = (18 - 11k, -3 + 2k)$$

Ce qui permet d'écrire l'ensemble des solutions -

$$S = \{(18 - 11k, -3 + 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Exo Résoudre  $3x + 4y = 17$

$$3 \wedge 4 = 1$$

$$3x + 4y = 17$$

$$3(-1) + 4(1) = 1 \quad (u, v) = (-1, 1)$$

$$17(-1, 1) = (-17, 17)$$

$$3(17k) + 4(-17k) = 0$$

$$(-1, 1) + (17k, -17k) = (-17 + 17k, 17 - 17k)$$

La solution est l'ensemble des couples  $(-17 + 17k, 17 - 17k) \mid k \in \mathbb{Z}$

Ex: Résoudre l'équation de Diophante

CHAP 2  
18x + 63y = 45  
x3 = 54  
x4 = 72

$$18x + 63y = 45 \quad (E)$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 18 \overline{) 63} \\ \underline{54} \phantom{0} \\ 9 \phantom{0} \\ \underline{9} \phantom{0} \\ 0 \end{array}$$

$$18 \wedge 63 = 9$$

$$2x + 7y = 5 \quad (E')$$

$2u + 7v = 1$  un couple de Bezout pour  $(2, 7)$  est  $(4, -1)$   
car  $2(4) + 7(-1) = 1$ , on le multiplie par 5

$5(4, -1) = (20, -5)$ , on résout  $2x + 7y = 0$  par

$$2(-7k) + 7(2k) = 0$$

On additionne les 2 solutions  $(20, -5) + (-7k, 2k) = (20-7k, -5+2k)$

L'ensemble de solution  $S = \{(20-7k, -5+2k), k \in \mathbb{Z}\}$

## Division euclidienne de polynômes

A) Rappel sur le degré

$P = 2x + 1$ , il est clair que  $P$  est de degré 1.

Si  $P$  est un polynôme constant, il y a 2 cas

★  $P = a_0 \neq 0$  et  $\deg(P) = 0$

★  $P = 0$  et  $\deg(P) < 0$

Soit  $A$  et  $B$  2 polynômes non nuls.

Si  $P = A \cdot B$

$$\deg(P) = \deg(A) + \deg(B)$$

BIA

Ex:  $A = x^2 + 1$   $B = x - 2$

$$BA = (x-2)(x^2+1) = x^3 + x - 2x^2 - 2$$

$$\deg(BA) = \deg(A) + \deg(B) = 2 + 1 = 3$$

B) Th de la division euclidienne pour les polynômes

Pour tout couple de polynômes  $(A, B)$  tel que  $B \neq 0$

il existe un unique couple de polynômes  $(Q, R)$  tel que:

$$A = BQ + R \quad \text{ET} \quad \deg R < \deg B \Rightarrow \text{On s'arrête}$$

Ex:  $x^2 - 1 \overline{) x^3 - 3x - 1}$

$$\begin{array}{r} \text{On divise le + haut terme de A par celui de B} \quad \frac{x^3}{x^2} = x \\ x^3 - 3x - 1 \\ \underline{-(x^3 - x)} \\ -2x - 1 \end{array}$$

$$x^3 - 3x - 1 = (x^2 - 1)x - 2x - 1$$

$$x^3 - x - 2x - 1 = x^3 - 3x - 1$$

Exos  $A = x^3 - x^2 + 1$   $B = x^2 + x - 1$

$$\begin{array}{r} x^2+x-1 \overline{) x^3-x^2+1} \\ \underline{-(x^3+x^2+x)} \quad -2 \\ -2x^2+x+1 \quad \underline{-(2x^2+2x-2)} \\ 3x-1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x \\ \underline{-(x^2+x-1)} \\ -2x^2 \end{array} = -2$$

$A = BQ + R$  s'écrit  $x^3 - x^2 + 1 = (x^2 + x - 1)(x - 2) + 3x - 1$

$$\begin{array}{r} x^4+x^3+6x^2+4x+8 \overline{) x^5+3x^4+7x^3+13x^2+12x+4} \\ \underline{-(x^5+x^4+6x^3+4x^2+8x)} \\ 2x^4+x^3+9x^2+4x+4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^4+x^3+9x^2+4x+4 \overline{) x^4+x^3+6x^2+4x+8} \\ \underline{-(2x^4+2x^3+12x^2+8x+16)} \\ -x^3-3x^2-4x-12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3+x^2-4x-3 \overline{) x^4-x^3+4x^2-6x+2} \\ \underline{-(x^4+x^3-4x^2-3x)} \quad -2 \\ 0 \quad -2x^3+8x^2-3x+2 \quad \underline{-(2x^3-2x^2+8x+6)} \\ 10x^2-11x-4 \end{array}$$

On allons écrire les diviseurs à coeff réels de  $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$

• Les constantes non nulles  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  Un truc au Pif.

$$(x-1)(x+1) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\mathbb{B}} \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{3}} (x-1)(x+1) \right)}_{\mathbb{Q}}$$

• Les polynômes de la forme  $\lambda(x+1)$  ou  $\lambda(x-1)$

$$(x-1)(x+1) = \underbrace{\left( \frac{1}{3} (x+1) \right)}_{\mathbb{B}} \underbrace{3(x-1)}_{\mathbb{Q}}$$

$$(x-1)(x+1) = (x-1) \frac{1}{2} (x+1)$$

• Les polynômes de la forme  $\lambda(x^2-1)$

$$(x^2-1) = \underbrace{\sqrt{7}}_{\mathbb{B}} (x^2-1) \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{7}} \right)}_{\mathbb{Q}}$$

## ACTIVITÉ

Faisons la ~~liste~~ liste des diviseurs de  $(x-2)$  et  $(x+3)$

$$D(x-2) = \{\lambda, \lambda(x-2)\} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$D(x+3) = \{\lambda, \lambda(x+3)\} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Il est l'ensemble des diviseurs communs à  $(x-2)$  et  $(x+3)$  ?  
C'est l'ensemble de ~~ls~~ les réels non nuls i.e.  $\mathbb{R}^*$

Intérêt pratique : quand on calculera le PGCD de 2 polynômes par l'algo d'Euclide, si le dernier reste non nul est une constante on dira que les 2 polynômes sont premiers entre eux et on mettra  $A \wedge B = 1$  (comme avec les nbres)

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + x + 1 \quad \overline{) \quad x^4 + x} \\ \underline{-(x^4 + x^3 + x^2 + x)} \quad \frac{x^4}{x^3} = x \\ -x^3 - x^2 \\ \underline{x^3 + x^2 + x + 1} \quad \frac{-x^3}{x^3} = -1 \\ x + 1 \quad \overline{) \quad x^3 + x^2 + x + 1} \quad \frac{x^3}{x} = x^2 \\ \underline{-(x^3 + x^2)} \\ x + 1 \\ \underline{-(x + 1)} \\ 0 \end{array}$$

les le polynome  
 $x+1$  est unitaire

$$A \wedge B = 1$$

dernier reste non nul

Def: Polynome Unitaire

c'est un polynome dont le terme de + haut degré à 1 en coeff

ex:  $1x^4 - 7x^2 + 3x$  est unitaire

$2x+1$  n'est pas unitaire

$P = \sqrt{5}$  n'est pas unitaire

$B = 1$  est unitaire

Conclusion de l'algo d'Euclide : le PGCD est le dernier reste non nul s'il est unitaire, sinon il faut diviser par le coeff du terme de + haut degré

Ex Calculer  $(x^3 - 3x - 1)$  par l'algo d'Euclide  
 $(x^2 - 1) \wedge$

$$\begin{array}{r} x^2 - 1 \quad \overline{) \quad x^3 - 3x - 1} \\ \underline{-(x^2 - 1)} \\ x - 3x - 1 \\ \underline{-2x - 1} \\ -(x^2 + \frac{x}{2}) \\ \underline{-\frac{1}{2}x - 1} \\ -(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}) \\ \underline{-\frac{3}{4}} \end{array}$$

$$\frac{x^2}{-2x} = -\frac{x}{2}$$

$$\frac{-x}{2(-2x)} = \frac{1}{4}$$

Conclusion Le dernier reste non nul est  $-\frac{3}{4}$  qui n'est pas unitaire le PGCD est de  $-\frac{3}{4} (-\frac{4}{3}) = 1$

PGCD Déf Le PGCD de 2 polynômes est leur diviseur commun unitaire de + ht degré

Exo: Pour chaque couple (A, B) déterminer A, B

$$\begin{aligned} 1) A &= (x-1)(x+1)^2 & B &= (x-1)(x+1)(x+2) \\ &= (x-1)(x^2+2x+1) & &= (x^2+x-x-1)(x+2) \\ &= (x^3+2x^2+x-x^2-2x-1) & &= x^3+2x^2+x^2+2x-x^2-2x-2 \\ &= x^3+x^2-x-1 & &= x^3+2x^2-x-2 \end{aligned}$$

Par Descartes de développer  
On repère le facteur commun.

$(x-1)(x+1)$  est un diviseur commun de degré 2  
Quest: est-il unitaire? ou en développant il est unitaire  
c'est de le PGCD.  
 $A \wedge B = (x-1)(x+1)$

$$2) A = (2x-1)(x-2)(x-1)^2 \quad B = (x-1)(x+2)(2x-1)(x+1)$$

$(2x-1)(x-1)$  est un diviseur commun  
 $A \wedge B = \frac{1}{2}(2x-1)(x-1) = (x-\frac{1}{2})(x-1)$

$$3) A = (x-1)^2 \left(\frac{x}{3}+2\right)^2 (x+1)^2 \quad B = (x+2) \left(\frac{x}{3}+2\right) (x-1)^2$$

$$(x-1)^2 \left(\frac{x}{3}+2\right)$$

$$A \wedge B = 3(x-1)^2 \left(\frac{x}{3}+2\right) = (3x-3)^2 \left(\frac{x}{3}+2\right)$$

$$4) A = (x+3)(2x-3)^2 (x-1)^2 \quad B = (2x-3)^2 (x-1)$$

$$(2x-3)^2 (x-1)$$

$$A \wedge B = \frac{1}{2}(2x-3)^2 (x-1) = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 (x-1) = (2(x-\frac{3}{2}))^2 (x-1) = 4(x-\frac{3}{2})^2 (x-1)$$

$$A \wedge B = (x-\frac{3}{2})^2 (x-1)$$

Exo Division Euclidienne

Sous quelles conditions sur m, p, q a-t-on  $A = x^3 + px + q$   
multiple de  $D = x^2 + mx - 1$

$$\begin{array}{r} x^2 + mx - 1 \overline{) x^3 + px + q} \\ \underline{-(x^3 + mx^2 - x)} \phantom{+ q} \\ -mx^2 + (p+1)x + q \\ \underline{-(-mx^2 - m^2x - m)} \\ (p+1+m^2)x + q-m \end{array} \quad -\frac{mx^2}{x^2} = -m$$

Condition sur le reste  $R=0$  d'où  $\begin{cases} p+1+m^2=0 \\ q-m=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} A(i) = B(i)Q(i) + ai + b \\ A(-i) = B(-i)Q(-i) - ai + b \end{cases}$$

Système linéaire  $2 \times 2$

$$\begin{cases} A(i) = ai + b \\ A(-i) = -ai + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin \varphi)i + \cos \varphi = ai + b \\ (\sin \varphi)-i + \cos \varphi = -ai + b \end{cases}$$

$$A = (\sin \varphi)x + \cos \varphi \quad A(i) = (i \sin \varphi) + \cos \varphi$$
~~soit  $i^{14}$~~ 

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{14} = e^{i14\varphi}$$

$$\begin{cases} e^{i14\varphi} = ai + b \\ e^{-i14\varphi} = -ai + b \end{cases}$$

Rejoindre en a et b.

Somme et différence

somme  $e^{i14\varphi} + e^{-i14\varphi} = 2b \Leftrightarrow b = \frac{e^{i14\varphi} + e^{-i14\varphi}}{2}$

Diff  $e^{i14\varphi} - e^{-i14\varphi} = 2ia \quad b = \cos 14\varphi$

$$a = \frac{e^{i14\varphi} - e^{-i14\varphi}}{2i} = \sin 14\varphi$$

$$R(x) = (\sin 14\varphi)x + \cos 14\varphi$$

Exo A:  $3x^3 - 4x^2 - x + 2$  B:  $3x^2 + 5x + 2$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 5x + 2 \overline{) 3x^3 - 4x^2 - x + 2} \\ \underline{-(3x^3 + 5x^2 + 2x)} \phantom{+ 2} \\ 0 - 9x^2 - 3x + 2 \\ \underline{-(-3x^2 - 15x - 6)} \phantom{+ 2} \\ 0 + 12x + 8 \end{array}$$

$\cos$   $\frac{\pi}{2}$   $\frac{\pi}{3}$   $\frac{\pi}{4}$   $\frac{\pi}{6}$   
 $\sin$   $0$   $\frac{1}{2}$   $\frac{\sqrt{2}}{2}$   $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \quad \frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 - 2x}$$

Calculer la forme exponentielle de:

a)  $\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{|1-i|}{|1+\sqrt{3}i|} = \frac{\sqrt{1^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$1-i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$1+\sqrt{3}i = 2 e^{i\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right)$

$\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2 e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi(-\frac{7}{12})} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

2)  $4(1+i) = 4\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$

$4 \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = 4 \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2 e^{i\frac{\pi}{6}}} = 2\sqrt{2} e^{i\pi(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})} = 2\sqrt{2} e^{i\pi(\frac{3-2}{12})} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$

c)  $\frac{15 e^{i\frac{3\pi}{5}}}{27 e^{i\frac{8\pi}{5}}} = \frac{5}{9} e^{i\pi(\frac{3-8}{5})} = \frac{5}{9} e^{-i\pi} = -\frac{5}{9}$

Linéariser  $\sin^4 t = \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^4$

$= \frac{1}{2i^4} \left( e^{i4t} - 4e^{i2t}e^{-it} + 6e^{i2t}e^{-2it} - 4e^{it}e^{-3it} + e^{-i4t} \right)$

$= \frac{1}{16} (e^{i4t} - 8e^{-it} + 6)$

$= \frac{1}{16} (\cos 4t - 8 \cos t + 6)$

$= \frac{1}{8} (\cos 4t - 4 \cos t + 3)$

factoriser par l'arc moitié

Factoriser  $e^{i\frac{\pi}{8}}$  au numérateur et  $e^{-i\frac{\pi}{16}}$  au dénominateur

$\frac{1+e^{i\frac{\pi}{4}}}{1-e^{-i\frac{\pi}{8}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{8}} (2 \cos \frac{\pi}{8})}{e^{i\frac{\pi}{16}} (-2i \sin \frac{\pi}{16})} = \frac{e^{i\frac{\pi}{8}} \cos \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{16}}$

Algorithme d'Euclide :  $(3x^2 + 5x + 2) \wedge (3x^3 - 4x^2 - x + 2)$

$$3x^3 - 4x^2 - x + 2 = (3x^2 + 5x + 2)(x - 3) + 12x + 8$$

$$\begin{array}{r} 12x + 8 \overline{) 3x^2 + 5x + 2} \\ \underline{-(3x^2 + 2x)} \phantom{+ 2} \\ 0 \phantom{+} 3x + 2 \\ \underline{-(3x + 8)} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{3x^2}{12x} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{3x}{12x} = \frac{1}{4}$$

Le dernier reste non nul est  $3x + 2$   
 de  $A \wedge B = \frac{1}{3} (3x + 2) = x + \frac{2}{3}$

Exo Soit  $a \in \mathbb{C}$  et  $P \in \mathbb{C}[X]$  (les polynômes à coefficients de  $\mathbb{C}$ )

Si  $Q$  et  $R$  sont le quotient et le reste dans la division de  $P$  par  $x - a$ ;  
 1) qd est le degré de  $R$ ?  
 2) qle valeurs prend  $R$ ?

D'après le th de la division euclidienne

$$P = Q(x - a) + R \quad \deg R < 1$$

possibilités pour  $R$  : constante non nul  $\deg R = 0$   
constante nul  $\deg R = 0$  ou  $R = 0$

Soit  $R$  prend la valeur 1

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R(x), \text{ en } a \text{ l'égalité s'écrit}$$

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R(a) \text{ or } R \text{ est une constante d'où}$$

$$P(a) = R$$

Exo Soit  $A = ((\sin \varphi)x + \cos \varphi)^{2n}$  et  $B = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$

1) Déterminer à l'aide du théorème de la division euclidienne un système  $2 \times 2$  (abr équats x abr inconnus) en évaluant en des valeurs bien choisies.

2) En déduire le reste dans la division de  $A$  par  $B$ .

On sait que  $\deg R < \deg(x^2 + 1) = 2$

$$R(x) = ax + b$$

$$x = i$$

$$P(x) = (x^2 + 1)((\sin \varphi)x + \cos \varphi)^{2n} = (ax + b)$$

$$P(x) = (x^2 + 1)((\sin \varphi)x + \cos \varphi)^{2n} = (ax + b)$$

$$A = BQ + R \quad ((\sin \varphi)x + \cos \varphi)^{2n} = \frac{A}{B(x^2 + 1)} + (ax + b)$$

$$\begin{cases} ((\sin \varphi)i + \cos \varphi)^{2n} = B(i^2 + 1)(Q(i) + (ai + b)) \\ ((\sin \varphi)-i + \cos \varphi)^{2n} = B(-i^2 + 1)(Q(-i) + (ai - b)) \end{cases}$$

Ex posuite  $y = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  Suite -

- 1) On a montré que  $y^3 = 1$  et  $y^2 = \bar{y}$
- 2) Périodicité de la suite de  $(y^k)_{k \in \mathbb{N}}$   
 Montrer que la suite de  $y^k$  est 3-périodique

$$(-1)^n \quad n \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4$$

$$(-1)^n \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1$$

$$u_{n+3} = u_n$$

$$u_n = y^n \quad \text{il faut montrer que } u_{n+3} = u_n$$

$$u_{n+3} = y^{n+3} = y^n + y^3 \quad \text{or } y^3 = 1 \text{ de } u_{n+3} = y^n = u_n$$

Theorème à utiliser  $(x-a) \mid P \Leftrightarrow P(a) = 0$   
 Montrer que  $(x-y) \mid (3x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 2x + 2) = S$

$$\begin{aligned} S(y) &= 3y^4 + 3y^3 + 5y^2 + 2y + 2 \\ &= 3(y) + 3(1) + 5(\bar{y}) + 2(y) + 2 \\ &= 5y + 5\bar{y} + 5 \\ &= 5(y + \bar{y} + 1) \\ &= 5\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \\ &= 5(-1 + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^4 &= y \\ y^3 &= 1 \\ y^2 &= \bar{y} \\ y &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(y) &= 5(1 + 2 \operatorname{Re}(y)) \\ &= 5(1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Conclusion  $(x-y) \mid S$

La formule célèbre

$$\begin{aligned} (x-a)(x-\bar{a}) &= x^2 - \bar{a}x - ax - a\bar{a} \\ &= x^2 - (a + \bar{a})x + |a|^2 \\ &= x^2 - 2\operatorname{Re}(a)x + |a|^2 \end{aligned}$$

Exo: Utiliser la formule célèbre

$$(x-y)(x-\bar{y}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(y)x + |y|^2$$

$$\begin{aligned} (x+y)(x+\bar{y}) &= (x-(-y))(x-(-\bar{y})) \\ &= x^2 - 2\operatorname{Re}(-y)x + 1 \\ &= x^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)x + 1 \\ &= x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x - e^{i\frac{\pi}{4}})(x - e^{-i\frac{\pi}{4}}) &= x^2 - 2\operatorname{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}})x + |e^{i\frac{\pi}{4}}|^2 \\ &= x^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1 \end{aligned}$$

$$(x - e^{i\frac{3\pi}{4}})(x - e^{-i\frac{3\pi}{4}}) = x^2 + \sqrt{2}x + 1$$

Intensité d

# Identité de Bezout pr les polynômes

Si A et B sont 2 polynômes à coefficients de  $\mathbb{C}$  il existe 2 polynômes U et V à coefficients de  $\mathbb{C}$  tel que

$$AU + BV = A \wedge B$$

pour le cas utile sera  $A \wedge B = 1$  et  $AU + BV = 1$

Ex: montrons que  $x-1$  et  $x+1$  st premiers entre eux. Il suffit de trouver U et V tels que  $U(x-1) + V(x+1) = 1$

$$\begin{cases} U+V=0 \\ U+V=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{somme } 2V=1 \\ \text{différence } 2U=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V=\frac{1}{2} \\ U=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Au final identité de Bezout  $-\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x+1) = 1$

Ca Soit a et b 2 complexes distincts calculer 2 constantes u et v telles que  $u(x-a) + v(x-b) = 1$

$$(u+v)x - (ua + vb) = 1$$

$$\text{On identifie } \begin{cases} u+v=0 \\ ua+vb=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} u=-v \\ v(-a+b)=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v=\frac{1}{a-b} \\ u=-\frac{1}{a-b} \end{cases} \quad \text{Conclusion } (x-a) \wedge (x-b) = 1 \text{ ssi } a \neq b$$

Exo: multiplicité d'une racine  
Soit  $P = x^3 + x^2 - 16x + 20$

- 1) Calculer  $P(2)$
- 2) Diviser P par  $x-2$
- 3) Diviser  $P = (x-2)$  par  $(x-2)$

b) Mettre P sous la forme d'un produit de 2 facteurs.

$$\begin{aligned} 1) P(2) &= 2^3 + 2^2 - 16(2) + 20 \\ &= 8 + 4 - 32 + 20 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad x-2 \overline{) x^3 + x^2 - 16x + 20} \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \phantom{+ 20} \\ 0 \quad 3x^2 - 16x + 20 \\ \underline{-(3x^2 - 6x)} \phantom{+ 20} \\ 0 \quad -10x + 20 \\ \underline{-(-10x + 20)} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x} = x^2$$

$$\frac{3x^2}{x} = 3x$$

$$\frac{-10x}{x} = -10$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad x-2 \overline{) x^2 + 3x - 10} \\ \underline{-(x^2 - 2x)} \phantom{- 10} \\ 0 \quad 5x - 10 \\ \underline{-(5x - 10)} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{x^2}{x} = x$$

$$\frac{5x}{x} = 5$$

$$\begin{aligned} 1) P &= (x-2)(x^2 + 3x - 10) \\ &= (x-2)(x-2)(x+5) = (x-2)^2 (x+5) \end{aligned}$$

Théorème caractérisation d'une racine multiple (la multiplicité livrée à domicile)

$\alpha$  est une racine de multiplicité  $n$  de  $P$  ssi:  
 $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  (i.e pour tout  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n-1$ ):  $P^{(k)}(\alpha) = 0$   
 $\text{ET } P^{(n)}(\alpha) \neq 0$

Ex:  $P = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$

Sachant que  $i$  est racine déterminons sa multiplicité.

$P(i) = P'(i) = 0$  par hypothèse

$P^{(1)}(x) = P'(x) = 6x^5 + 5x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 6x + 1$

$P'(i) = 6i + 5 - 12i - 6 + 6i + 1$   
 $= 0i - 6 + 6 = 0$



$P''(x) = 30x^4 + 20x^3 + 36x^2 + 12x + 6$

$P''(i) = 30 - 20i - 36 + 12i + 6 = -8i \neq 0$

Ex: Soit  $P = x^4 - 2ix^3 - 2ix - 1$

1) Déterminer l'ordre (syn multiplicité) de  $i$

2) Déterminer l'ordre de  $-i$

$P(i) = P'(i) = 0$  par hypothèse

$P^{(1)}(x) = P'(x) = 4x^3 - 6ix^2 - 2i$

$P'(i) = -4i + 6i - 2i$   
 $= 6i - 6i$   
 $= 0$

$P^{(2)}(x) = P''(x) = 12x^2 - 12ix$

$P''(i) = 12i^2 - 12i^2$   
 $= 0$

$P^{(3)}(x) = P'''(x) = 24x - 12i$

$P'''(i) = 24i - 12i$   
 $= 12i$

$\neq 0$

$i$  est racine d'ordre 3.

$P(-i) = -4i^3 + 6i + 2i$

$= 4i + 6i + 2i = 8i \neq 0$

$-i$  est racine simple.

Ex + FUN

Trouver  $a$  et  $b$  tel que  $1$  soit racine double de  
 $P = ax^{n+1} + bx^n + 1$  Rmq:  $n \geq 1$  car  $\deg P \geq 2$

$P'(x) = a(n+1)x^{n+1-1} + b(n)x^{n-1}$   
 $= a(n+1)x^n + b(n)x^{n-1} = 0$

$P''(x) = a(n+1)nx^{n-1} + b(n)n x^{n-2} \neq 0$

On peut utiliser  $P(1) = 0$  et  $P'(1) = 0$

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{il faut vérifier } P''(1) \neq 0)$$

$$P'(x) = (n+1)ax^n + nbx^{n-1}$$

$$P'(1) = (n+1)a + nb$$

$$P(1) = a + b + 1$$

d'où

$$\begin{cases} (n+1)a + nb = 0 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} an + a + nb = 0 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} an + a + nb = 0 \\ b = -1 - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} an + a + n(-1 - a) = 0 \\ b = -1 - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} an + a - n - an = 0 \\ b = -1 - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - n = 0 \\ b = -1 - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = n \\ b = -1 - a \\ b = -1 - n \end{cases}$$

Autre méthode

$$\begin{cases} (n+1)a + nb = 0 \\ -na - nb = n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = n \\ n + b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = n \\ b = -(n+1) \end{cases}$$

$$P'(x) = (n+1)ax^n + nbx^{n-1}$$

$$P''(x) = (n+1)na x^{n-1} + (n-1)nbx^{n-2}$$

$$P''(1) = (n+1)na + (n-1)nb$$

$$P'(x) = n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1}$$

$$P'(x) = n(n+1)[x^n - x^{n-1}]$$

$$P''(x) = n(n+1)[nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2}]$$

$$P''(1) = n(n+1)[n - (n-1)]$$

$$P''(1) = n(n+1)(n - n + 1)$$

$$= n(n+1) \neq 0$$

$$\deg P \geq 2 \text{ de } n \geq 1$$

On remplace  $a = n$   
 $b = -(n+1)$

$$\begin{cases} e^{i\theta} = a + bi \\ e^{-i\theta} = -a + bi \end{cases}$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2ia \Leftrightarrow a = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin \theta$$

mettre sous forme  $pe^{i\theta}$  avec  $p \in \mathbb{R}^+$  et  $\theta \in [0, 2\pi]$

$$*-2 + i2\sqrt{3} \cdot \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4 \quad 4\left(\frac{-2}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{4}i\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$*- \frac{1}{3} - \frac{i}{\sqrt{3}} \quad \left| -\frac{1}{3} - \frac{i}{\sqrt{3}} \right| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \left( \frac{-3}{2} \frac{1}{3} - i \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2}{3} e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{Soit } P = 2x^2 + 6ix - 6 + 2i$$

- a) montrer que  $-1-i$  est une racine de  $P$   
b) Effectuer la division de  $P$  par  $(x+1+i)$

$$\begin{aligned} a) (1+i)^2 &= 1+2i-1=2i \\ (-1-i)^2 &= (1+i)^2 \text{ car } (-1-i)^2 = (-1(1+i))^2 \\ &= (-1)^2(1+i)^2 \\ &= (1+i)^2 \end{aligned}$$

$$P(-1-i) = 2((1+i)^2 + 3i(-1-i) - 3 + i) = 2(2i - 3i + 3 - 3 + i) = 2(0+0) = 0$$

b)  $P = (x+1+i)Q$  la division va nous donner  $Q$ .

$$\begin{array}{r} x+1+i \overline{) 2x^2 + 6ix - 6 + 2i} \\ \underline{-(2x^2 + 2(1+i)x)} \\ (-2+4i)x - 6+2i \\ \underline{-(2(-1+2i)x + 2(-3+i))} \\ 0 \end{array} \quad \frac{(-2+4i)x}{x} = 2\left(\frac{-1+2i}{1}\right)$$

1) Calculer  $i^3, i^4$

2) montrer que  $i$  est racine de  $P = x^4 - 2ix^3 - 2ix - 1$

3) Diviser  $P$  par  $(x-i)$

$$\begin{aligned} 1) i^3 &= -i \quad i^4 = 1 \\ 2) P(i) &= i^4 - 2ii^3 - 2ii - 1 \\ &= 1 - 2 + 2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{x^4}{x} = x^3$$

$$\begin{array}{r} x-i \overline{) x^4 - 2ix^3 - 2ix - 1} \\ \underline{-(x^4 - ix^3)} \\ -ix^3 - 2ix - 1 \\ \underline{-(-ix^3 - x^2)} \\ x^2 - 2ix - 1 \\ \underline{-(x^2 - ix)} \\ -ix - 1 \\ \underline{-(-ix - 1)} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{-ix^3}{x} = -ix^2$$

$$\frac{x^2}{x} = x$$

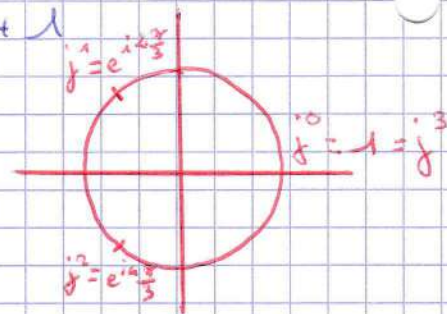
$$\frac{-ix}{x} = -i$$

On montre que  $P = (x-1)(x^3 - 1x^2 + x - i)$

Ex. montrer que  $(x+i) \mid 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ , il suffit de montrer que

$(x+i) = (x - (-i))$  si on identifie avec  $x - \alpha$ ,  $\alpha = -i$

$$\begin{aligned} P(-i) &= 2(-i)^4 - 3(-i)^3 + 3i^3 - 3(-i) + 1 \\ &= 2 + 3i^3 - 3 + 3i + 1 \\ &= 2 - 3 + 1 - 3i + 3i = 0 \end{aligned}$$



Exo pro  $j = e^{i2\pi/3}$

1) trouver de 2 fcon différentes que  $j^2 = \overline{j}$

$$j = e^{i2\pi/3} \quad j = x + iy$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta$$

$$= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -1 + i\sqrt{3}$$

$$x = -1 \quad y = \sqrt{3}$$

$$j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^2 = (e^{i2\pi/3})^2$$

$$= e^{-i2 \times 2\pi/3}$$

$$= e^{i4\pi/3} = \overline{j}$$



symétrique

$$j^2 = \frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$$

Ex. montrer que  $j^3 = 1$ , calculer  $j^4, j^5$  et  $j^6$

$$j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^2 = \frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^3 = \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$(e^{i2\pi/3})^3 = e^{i2\pi} = 1$$

$$j^4 = j^3 \cdot j = 1 \cdot j = j$$

$$j^5 = j^3 \cdot j^2 = j^2$$

$$j^6 = (j^3)^2 = 1$$

Theorème Soit  $a$  et  $b$  2 complexes distincts  
 Alors si  $x-a \mid P$  et  $x-b \mid P$  on a  $(x-a)(x-b) \mid P$

Exo Utiliser ce résultat pr montrer que  $(x^2+x+1) = (x-j)(x-\bar{j})$   
 divise  $P = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2} = P$  où  $m, n, p$  sont ds  $\mathbb{N}$ .

$$P' = \frac{3m}{3m} x^{(3m)-1} + \frac{(3n+1)}{(3n+1)} x^{(3n+1)-1} + \frac{(3p+2)}{(3p+2)} x^{(3p+2)-1}$$

$$= 3m x^{2m} + (3n+1) x^{2n+1} + (3p+2) x^{2p+2}$$

$$P(j) = j^{3m} + j^{3n+1} + j^{3p+2}$$

$$= \frac{j^{3m}}{(j^3)^m} + \frac{j^{3n+1}}{(j^3)^n j} + \frac{j^{3p+2}}{(j^3)^p j^2}$$

$$= 1^m + 1^n j + 1^p j^2 = 1 + j + j^2$$

$$j = j$$

$$j = j^2$$

Par l'énoncé  $(x^2+x+1) = (x-j)(x-\bar{j})$   
 $\Rightarrow (j^2+j+1) = \underbrace{(j-j)}_0 (j-\bar{j})$

$$\bar{j} = j^2$$

$$P(\bar{j}) = \bar{j}^{3m} + \bar{j}^{3n+1} + \bar{j}^{3p+2}$$

$$= (j^2)^{3m} + (j^2)^{3n+1} + (j^2)^{3p+2}$$

$$= (j^6)^m + (j^6)^n j^2 + (j^6)^p j^4$$

$$= 1^m + j^2 + j$$

$$j^6 = j = 1$$

$$j^4 = j$$

Conclusion:  $(x-j)(x-\bar{j}) = x^2+x+1 \mid P$

Exo Ecrire le polynôme  $P = 5x^2 - i10\sqrt{2}x - 10$   
 comme produit de 2 facteurs de degré 1 sans calculer  $\Delta$ .

$$P = 5x^2 - i10\sqrt{2}x - 10$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$P = 5(x^2 - i2\sqrt{2}x - 2) \quad \text{avec } b = i\sqrt{2}$$

$$= 5(x - i\sqrt{2})^2$$

$$= 5 \underbrace{(x - i\sqrt{2})}_{\text{deg } 1} \underbrace{(x - i\sqrt{2})}_{\text{deg } 1}$$

## Factorisation dans $\mathbb{C}[x]$ (théorème fondamental de l'arithmétique)

$\mathbb{C}[x]$ : l'ensemble de polynômes à coefficient dans  $\mathbb{C}$ .

Th. Tout polynôme non constant à coeff dans  $\mathbb{C}$  peut s'écrire sous la forme  $P(x) = c(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_m)$  où  $c, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  sont ds  $\mathbb{C}$ .

Rm<sup>1</sup> Si on remplace la première  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{R}$  le théorème reste vrai car  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . Sans pas si on remplace la 2<sup>ème</sup>  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{R}$  comme le montre le contre-exemple suivant.

contre ex  $x^2 + x + 1 = (x - j)(x - \bar{j}) \quad \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

De ce polynôme n'a pas de racines réelles, il n'est donc pas divisible par un facteur  $(x - \lambda) \in \mathbb{R}$ ; il ne peut pas se mettre sous la forme  $(x - \lambda)(x - \lambda_2) \in \mathbb{R}$ , il ne peut pas avec  $\lambda_1, \lambda_2$  ds  $\mathbb{R}$ .

\* Rien ds le théorème ne nous dit que les  $\lambda_i$  sont distincts, si ils le sont  $P$  n'a que des racines simples. Sinon le nbr de fois que l'on trouve une racine dans la liste  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$  est sa multiplicité.

ex  $S = 2(x-1)(x+2)(x-1)(x-2)$ , avec la multiplicité en exposant en  $x$ :  $S = (x-1)^2(x+2)(x-2)$ , à l'ordre près.

ET PAS  $S = 2(x-1)^2(x^2-2)$

↳ pas de degré 2

- 2<sup>ème</sup> simple, 1 est simple, 1 est double, 2 est coeff dominant. On dit que l'on compte la racine avec l'ordre qd une racine d'ordre  $p$  compte comme  $p$  racine.

ex:  $T = (x-2)^3(x-1)^2(x-4)(x-3)^4$

T a 4 racines distinctes

T a  $3+2+1+4=10$

C'est un résultat général: le degré d'un polynôme de  $\mathbb{C}[x]$  est égal à la somme de la multiplicité (de l'ordre) de ses racines.

Ex 1 Donner la factorisation  $\mathbb{C}[x]$  des polynômes

A =  $x^2 + 1$   $\Delta < 0$ ,  $\Delta = -4 \times 1 \times 1 = -4 = \pm(2i)^2$   $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm 2i}{2} = \pm i$

A =  $(x-i)(x+i)$

B =  $x^2 + x + 1$   $\Delta < 0$ ,  $\Delta = -3 \pm 2\sqrt{3}$   $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

B =

C =  $x^2 - x + 1$   $\Delta < 0$ ,  $\Delta = -3$  B =  $(x-j)(x-\bar{j})$

$\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$   $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$  les racines sont  $-j$  et  $-\bar{j}$

C =  $(x - (-j))(x - (-\bar{j})) = (x+j)(x+\bar{j})$

Ex 2 Soit  $P = 2(x^2 + 3ix - 3 + i)$

a) montrer que  $1-2i$  est racine

b) si  $P = ax^2 + bx + c$ , que vaut le produit de ses racines?

c) En déduire la factorisation ds  $\mathbb{C}[x]$  (ss divisions euclidienne)

$$Ex \quad P = 2(x^2 + 3ix - 3 + i)$$

$$|\Delta| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Delta = (3i)^2 - 4(1)(-3+i) \\ = -9 + 12 - 4i \\ = -4i + 3$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow 2x =$$

a) Il suffit d'évaluer en  $1-2i$

$$P = 2((1-2i)^2 + 3i(1-2i) - 3 + i) = 2(1 - 4i + 4 - 3 + 6i - 3 + i) \\ = 2(1 - 3 + 6 - 3 + i(-4 + 3 + 1)) \\ = 0$$

b) On note  $u = 1-2i$

$$u + u_2 = -3i \text{ car } P \text{ et } \frac{1}{2}P \text{ ont } \bar{u} \text{ racines} \\ u_2 = -3i - (1-2i) \\ = -3i - 1 + 2i \\ = -1 - i$$

$$\frac{b}{a} \text{ avec } a = 1$$

c) D'où la factorisation en TFA ds  $\mathbb{C}[x]$

$$P = 2(x - 1 + 2i)(x + 1 + i)$$

$$P = c(x - z_1)(x - z_2)$$

Factorisation dans  $\mathbb{C}[x]$

Donner la factorisation dans  $\mathbb{C}[x]$

$$P = (x^2 - 3)(x^2 + 1) \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - i)(x + i)$$

$$(x - (-i))(x + (-i))$$

il y a une racine simple

$$S = (3x^2 - 6x + 3)(x^2 + x + 1)$$

$$x^2 + x + 1 \Rightarrow \heartsuit \quad x^2 - 2\operatorname{Re}(a)x + |a|^2$$

Pour trouver les racines  $-2\operatorname{Re}(a) = 1$  dc  $\operatorname{Re}(a) = -\frac{1}{2}$  et  $|a| = 1$

$$\text{où } \Delta = -3 \quad z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Soit  $x^2 + x + 1 = (x - j)(x - \bar{j})$  est un cas particulier de  $x^2 - 2\operatorname{Re}(a)x + |a|^2 = (x - a)(x - \bar{a})$

$$S = (3x^2 - 6x + 3)(x - j)(x - \bar{j})$$

$$\text{factorisation } 3x^2 - 6x + 3 \Rightarrow 3(x^2 - 2x + 1) \\ = 3(x - 1)^2$$

$S = 3(x - 1)^2(x - j)(x - \bar{j})$ , une double et 2 simples.

$$T = (2x + 1)(x^2 - x + 1)^2 \\ = (2x + 1)(x + j)^2(x + \bar{j})^2 \\ = 2(x + \frac{1}{2})$$

1 double et 1 simple.

$$= 2(x + \frac{1}{2})(x + j)^2(x + \bar{j})^2$$

$$U = (2x^2 - 7)(x^2 + 1)^3$$

$$2x^2 - 7 = 2\left(x^2 - \frac{7}{2}\right)$$

$$U = 2\left(x^2 - \frac{7}{2}\right)((x+i)(x-i))^3$$

$$= 2\left(x - \sqrt{\frac{7}{2}}\right)(x+i)^3(x-i)^3 \quad \begin{array}{l} i \text{ est triple} \\ -i \text{ est triple} \end{array}$$

Exo Evaluer  $\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n$

a) développer  $(a-b)^5$

b) en déduire  $\sin^5 x$  comme combinaison linéaire de ... au on fait, c'est sinus ou cosinus ?

$$\begin{aligned} n=5 \quad \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 &= \frac{1}{2i^5} \left( e^{i5x} - 5e^{i4x}e^{-ix} + 10e^{i3x}e^{-i2x} - 10e^{i2x}e^{-i3x} + 5e^{ix}e^{-i4x} - e^{-i5x} \right) \\ &= \frac{1}{2i^5} (\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x) \end{aligned}$$

Exprimer  $\sin^2 x \cos^4 x$  comme combinaison linéaire de cosinus

$$\sin^2 x \cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$$

Rmq: si on développe avant multiplier on aura  $3 \times 5 = 15$  termes.

$$= \frac{1}{2^4 \cdot 2 \cdot i^2} \underbrace{(e^{ix} - e^{-ix})^2 (e^{ix} + e^{-ix})^2 (e^{ix} + e^{-ix})^2}_{\text{termes}}$$

$$= \frac{-1}{32 \cdot 2} (e^{i2x} - e^{-i2x})^2 (e^{ix} + e^{-ix})^2$$

$$= \frac{-1}{32 \cdot 2} (e^{4ix} + e^{-4ix} - 2) (e^{ix} + e^{-ix})^2$$

$$= \frac{-1}{32 \cdot 2} (e^{6ix} + 2e^{4ix} + e^{2ix} - 2e^{2ix} - 4 - 2e^{-2ix} + e^{-2ix} + 2e^{-4ix} + e^{-6ix})$$

$$= \frac{-1}{32 \cdot 2} (\cos 6x + 2\cos 4x - \cos 2x - 2)$$

$$= \frac{1}{32} (-\cos 6x - 2\cos 4x + \cos 2x + 2)$$

## Decomposition en éléments simples

Une fonction rationnelle est une  $f(x)$  de type  $\frac{P}{Q}$  où  $P \in \mathbb{C}[x]$  et  $Q \in \mathbb{C}[x]$

Dans ce chapitre nous travaillerons à partir de fractions irréductibles, i.e.  $\text{PGCD}(P, Q) = 1$ .

Vocabulaire: \* on appelle pôle de  $F = \frac{P}{Q}$  toute racine de  $Q$ .

\* si  $\alpha$  est un pôle de  $F = \frac{P}{Q}$ , la multiplicité de  $\alpha$  en tant que pôle de  $F$  est l'ordre  $Q$  de multiplicité de  $\alpha$  en tant que racine de  $Q$ .

Définition on appelle élément simple de première espèce une fraction rationnelle de la forme  $\frac{c}{(x-\alpha)^m}$  avec  $c \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$

ex 
$$F = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{5}{(x-1)^2}$$
  
pôle 0                      pôle -1                      pôle 1.

0 est pôle d'ordre 3,  $\frac{1}{x}$  est d'ordre 1,  $\frac{2}{x^3}$  est d'ordre 3.  
-1 est pôle d'ordre 2,  $\frac{3}{x+1}$  est d'ordre 1,  $\frac{4}{(x+1)^2}$  est d'ordre 2.  
1 est pôle d'ordre 2,  $\frac{5}{(x-1)^2}$  est d'ordre 2.

ex a) dénominateur scindé sur  $\mathbb{R}$ , un pôle simple, un pôle double

$$\frac{x^2 - x - 1}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

-1 pôle d'ordre 2  
0 d'ordre 1

b) dénominateur non scindé sur  $\mathbb{R}$ , 3 pôles simples dont 2 conjugués

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x+1}{(x-1)(x+i)(x-i)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1/2}{x-i} - \frac{1/2}{x+i}$$

c) dénominateur non scindé sur  $\mathbb{R}$ , 2 pôles simples conjugués

$$\frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}}{x + \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}}{x + \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}}$$

Partie polaire relative à un pôle simple

Si  $\alpha$  est un pôle simple de la fraction  $\frac{P}{Q}$ , on a forcément  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  (si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha$  n'est pas pôle simple).

Le coefficient  $c$  de l'élément simple  $\frac{c}{x-\alpha}$  vaut  $c = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$

exemple:

$$= \frac{-1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x^2 - x - 1}{x(x+1)^2} = \frac{a=-1}{x} + \frac{b=2}{x+1} + \frac{c=-1}{(x+1)^2}$$

) forme a priori de la décomposition

$Q_1 = (x+1)^2$ , calculons à la fois le coef associé au pôle simple 0.

$$a = \frac{P(0)}{Q_1(0)} = \frac{-1}{1} = -1$$

exo calculer le coef c de l'élément simple  $\frac{c}{x+1}$  associé au pôle simple  $-i$  de la fraction

$$\frac{x+1}{(x-i)(x+i)(x-i)} \quad Q_1(x) = (x-i)(x-i)$$

$$\frac{P(-i)}{Q_1(-i)} = \frac{-i+1}{(-i-i)(-2i)} = \frac{1-i}{2i(1+i)} = \frac{1-i}{2(xi+i^2)} = \frac{1-i}{2(i-i)}$$

$$\frac{1-i}{2(i-i)} = -\frac{1}{2}$$

Exemple de la décomposition avec limite à l'infini et évaluation

$$F = \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

0 est pôle simple -  $a = \frac{P(0)}{Q_1(0)}$  avec  $Q_1(x) = (x+1)^2$

$$a = \frac{-1}{(0+1)^2} = -1$$

c'est le coef de l'élément simple d'ordre max (en fait très comme ça pr un élément simple d'indice max)

$$(x+1)^2 F = \frac{x^2 + x - 1}{x} = -\frac{(x+1)^2}{x} + b(x+1) + c$$

on multiplie par  $(x+1)^2$

$$\frac{(-1)^2 - 1 - 1}{-1} = -\frac{(x+1)^2}{x} + b(x+1) + c$$

en remplaçant  $x$  par  $-1$

$$\frac{-1}{-1} = c \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{On en est à } F = \frac{-1}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

1<sup>er</sup> opt<sup>e</sup> évaluer les 2 membres en une valeur la plus simple possible (0, 1, -1) ici on prend 1.

$$F = -1 + \frac{b}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1+1-1}{1 \cdot 2^2} = \frac{1}{2^2} \quad \text{évalué en 1}$$

2<sup>ème</sup> opt on multiplie par  $(x+1)$  et on passe à la limite en  $+\infty$

$$\frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)} = \frac{-(x+1)}{x} + b + \frac{1}{x+1}, \text{ à la limite}$$

$$1 = -1 + b + 0 \Rightarrow 2 = b$$

Exo Sachant que la décomposition en élément simple de la forme:

$$1) = \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

- \* Calculer  $a$  avec la formule du pôle simple
- \* Calculer  $c$  avec la technique du coef d'indice max
- \* Calculer  $b$  avec l'évaluation en 0.

\*  $+1$  est pôle simple  $a = \frac{P(1)}{Q'(1)}$  avec  $Q_1(x) = (x+1)^2$

$$a = \frac{2 \cdot 1 + 1}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$$

\* Pour  $c$  on multiplie les 2 membres par  $(x+1)^2$

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{3(x+1)^2}{4(x-1)} + b(x+1) + c$$

$$\frac{-2+1}{-1-1} = \frac{1}{2} = c$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{3}{4(x-1)} + \frac{b}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}, \text{ en 0 on a}$$

$$-1 = \frac{-3}{4} + b + \frac{1}{2}$$

$$b = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

d'où la décomposition

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{3}{4(x-1)} - \frac{3}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}$$

Exo, 2 pôles simples conjugués,  $F$  à coef réels

\* Calculer les coef de 2 pôles simples de la  $fct^o$ ;

$$F = \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x}{(x-\gamma)(x-\bar{\gamma})}$$

$$F = \frac{a}{(x-\gamma)} + \frac{b}{(x-\bar{\gamma})}$$

$$a = \frac{P(\gamma)}{Q(\gamma)}$$

$$b = \frac{P(\bar{\gamma})}{Q(\bar{\gamma})}$$

$$a = \frac{\gamma}{(\gamma-\bar{\gamma})}$$

$$b = \frac{\bar{\gamma}}{(\bar{\gamma}-\gamma)}$$

Calculer

$$\gamma - \bar{\gamma} = 2i \operatorname{Im}(\gamma)$$

$$\operatorname{Im}(\gamma) = \frac{\gamma - \bar{\gamma}}{2i}$$

$$a = \frac{\gamma}{\gamma - \bar{\gamma}} = \frac{\gamma}{2i \frac{\gamma - \bar{\gamma}}{2}} = \frac{\gamma}{i(\gamma - \bar{\gamma})} = \frac{-i}{\sqrt{3}} \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{i}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma} - \gamma} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma} - \gamma} = \bar{a} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}$$

Théorème (diviser le boulot par 2)

Si  $F$  est une  $fct^o$  rationnelle à coef réels (cà d  $\mathbb{C}(x)$ ) et si  $\omega$  est une pôle NON REEL de  $F$  d'ordre  $n$ , alors  $\bar{\omega}$  est aussi un pôle d'ordre  $n$  de  $F$  et les coef des éléments relatifs à  $\omega$  et  $\bar{\omega}$  sont conjugués l'un à l'autre.

Illustration

$$F = \frac{x-1}{(x+1)(x-1+i)(x-1-i)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1+i} + \frac{\bar{b}}{x-1-i} = \frac{x-1}{(x+1)(x^2-2x+2)}$$

Après calculs

$$F = \frac{-2}{5(x+1)} + \frac{\frac{1}{5} + \frac{i}{10}}{x-1+i} + \frac{\frac{1}{5} - \frac{i}{10}}{x-1-i}$$

Exo Sachant que la compos<sup>te</sup> en ES de  $H = \frac{2x^2 - 4x - 2}{(x-i)^2(x+i)^2}$  est de la forme  $H = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{(x-i)^2} + \frac{\bar{a}}{x+i} + \frac{\bar{b}}{(x+i)^2}$

Calculer a et b

$$= \frac{2(x)^2 - 4x - 2}{(x^2+1)^2} = a(x-i) + b + \frac{\bar{a}(x-i)^2}{x+1} + \frac{\bar{b}(x-i)^2}{(x+i)^2}$$

évaluation en i  $\frac{-2-4i-2}{-4} = b = \frac{-4(i+1)}{-4} = 1+i$

$$b = 1+i$$

Passage à la limite  $x \rightarrow +\infty$

Évaluat<sup>on</sup> en 0 (pas symple qu'en 0 n'est pas pôle)

On multiplie par  $x-i$

$$\frac{2x^3}{x^4} = \frac{(x-i)(2x^2-4x-2)}{(x^2+1)^2} = a + \frac{(1+i)(x-i)}{(x-i)^2} + \frac{\bar{a}(x-i)}{x+i} + \frac{(1-i)(x-i)}{(x+i)^2}$$

à la limite (qd  $x \rightarrow +\infty$ )

d'où

$$0 = a + 0 + \bar{a} + 0$$

$$0 = a + \bar{a} \Leftrightarrow \text{Re}(a) = 0, a \text{ est imaginaire pur}$$

$$H = \frac{a}{x-i} + \frac{1+i}{(x-i)^2} - \frac{a}{x+i} + \frac{1-i}{(x+i)^2}$$

$$\frac{2x^2-4x-2}{(x^2+1)^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{1+i}{(x-i)^2} - \frac{a}{x+i} + \frac{1-i}{(x+i)^2}$$

$$-2 = -\frac{a}{i} + \frac{1+i}{(-i)^2} - \frac{a}{i} + \frac{1-i}{(i)^2}$$

$$-2 = -2\frac{a}{i} - (1+i) - (1-i) \Leftrightarrow -2 = \frac{-2a}{i} - 2$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{-2a}{i}$$

$$\frac{-2}{i} = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0$$

$$H = \frac{1+i}{(x-i)^2} + \frac{1-i}{(x+i)^2}$$

pas de terme en  $\frac{1}{x-i}$  pas de terme en  $\frac{1}{x+i}$

## Elements Simple de Seconde espèce

**Def:** Un E.S. de 2<sup>nd</sup> espèce est une fct<sup>o</sup> rationnelle de la forme

$$\frac{\gamma x + \delta}{(x^2 - 2\alpha x + \beta)^\gamma} \quad \text{avec } \gamma, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \text{ et } \gamma^2 - \beta < 0$$

Cette dernière condition assure que le dénominateur n'a pas de racine réelles.

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\beta = 4(\gamma^2 - \beta)$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \gamma^2 - \beta < 0$$

On obtient un E.S. de 2<sup>nd</sup> espèce par addition de 2 E.S. de première espèce

$$\frac{c}{x-a} + \frac{\bar{c}}{x-\bar{a}} = \frac{c(x-\bar{a}) + \bar{c}(x-a)}{x^2 - (a+\bar{a})x + a\bar{a}} = \frac{(c+\bar{c})x - (c\bar{a} + \bar{c}a)}{\underbrace{x^2 - 2\operatorname{Re}(a)x + |a|^2}}$$

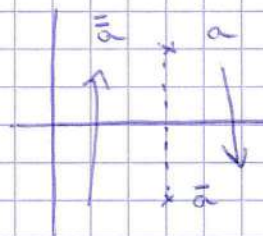
formule célèbre

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \operatorname{Re}(z)$$

$$= \frac{2\operatorname{Re}(c)x - (c\bar{a} + \bar{c}a)}{x^2 - 2\operatorname{Re}(a)x + |a|^2}$$

$$\overline{\bar{c}a} = \bar{c}\bar{a} = \bar{c}a$$

$$= \frac{2\operatorname{Re}(c)x - 2\operatorname{Re}(c\bar{a})}{x^2 - 2\operatorname{Re}(a)x + |a|^2}$$



Exo pour chacun des polynômes donnés:

- son nbr de racines dans  $\mathbb{C}$  avec l'ordre
- son degré

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (x-3)(x-5)(x-3)^2(x-1)^2(x-3)(x-1) \\
 &= (x-3)(x-5)(x-3)^2(x-j)(x-\bar{j})(x-3)(x-1) \\
 &= (x-3)(x-5)(x^2-6x+9)(x-j)(x-\bar{j})(x-3)(x-1) \\
 &= (x-5)(x-3)^4(x-1)^3, \quad 3 \text{ racines, 3 avec l'ordre, degré 8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_2 &= (x-1)^4(x-j)(x+j)(x-j)^2(x-1)(x+j) \\
 &= (x-1)^5(x-j)^3(x+j)^2 \quad 3 \text{ racines, 10 avec l'ordre, degré 10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_3 &= (x^2+x+1)^2(x^2-1)^2(x+1)^2 \\
 &= \cancel{2x^2+x^3+x^2+x^3+x+x^2+x^2+x^2+x^2+x^2+x^2}(x^2-1)^2(x+1)^2 \\
 &= ((x-j)(x-\bar{j}))^2((x-1)(x+1))^2(x+1)^2 \\
 &= (x-j)^2(x-\bar{j})^2(x+1)^2(x-1)^2 \\
 &\quad 4 \text{ racines, 10 avec l'ordre, degré 10}
 \end{aligned}$$

A retenir: nbr de racines ds  $\mathbb{C}$  avec l'ordre  
degré

Th Soit  $P$  un polynôme à coefficient réels et  $n$  un entier non nul,  $\alpha$  est une racine d'ordre  $n$  de  $P$  ssi  $\bar{\alpha}$  est aussi une racine d'ordre  $P$

Démonstration

lemme  $\overline{P(x)} = P(\bar{x})$

$$P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

$$\overline{P(x)} = \overline{a_0x^0 + a_1x + \dots + a_nx^n}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{P(x)} &= \overline{a_0x^0 + a_1x + \dots + a_nx^n} \\
 &= \overline{a_0} + \overline{a_1x} + \dots + \overline{a_nx^n}
 \end{aligned}$$

$$(\overline{z_1 + z_2}) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$(\overline{z_1 z_2}) = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

On utilise l'hypothèse  $\overline{a_i} = a_i$

$$\overline{P(x)} = a_0 + a_1\bar{x} + \dots + a_n\bar{x}^n$$

$$\text{or } \overline{x^k} = \bar{x}^k$$

$$(\overline{x^n}) = \overline{x}^n$$

$$\overline{P(x)} = a_0 + a_1\bar{x} + a_2\bar{x}^2 + \dots + a_n\bar{x}^n$$

App ce résultat à la dérivée d'ordre  $k$  pour  $k \in \{0, n\}$   
grâce au lemme

$$P^{(k)}(x) = 0 \Leftrightarrow \overline{P^{(k)}(x)} = 0 \Leftrightarrow P^{(k)}(\bar{x}) = 0 \quad \text{pr } k < n$$

$$P^{(n)}(x) \neq 0 \Leftrightarrow \overline{P^{(n)}(x)} \neq 0 \Leftrightarrow P^{(n)}(\bar{x}) \neq 0$$

Commentaire: le th réduit le travail de moitié, car si vs montrez par exemple que  
un polynôme à coeff réels a  $\alpha$  comme racine double, vs montrez aussi

qu'il est divisible par  $(x-j)^2 (x-\bar{j})^2 = (x^2+x+1)^2$

Exo  $P = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$

1) ql est l'ordre de  $i$ ?

2) En déduire que  $P$  est divisible par un polynôme de degré 4.

3) qlle est la factorisation de  $P$  ds  $\mathbb{C}[x]$

$$P(i) = \cancel{1i^6} + \cancel{1i^5} + \cancel{3i^4} + \cancel{2i^3} + \cancel{3i^2} + \cancel{1i} + \cancel{1} = 0$$

1)  $P'(i) = 6i + 5 - 12i - 6 + 6i + 1 = 6 - 6 + 12i - 12i = 0$

$$P'' = 30x^4 + 20x^3 + 36x^2 + 12x + 6$$

$$P''(i) = 30 - 20i - 36 + 12i + 6 = 0 - 8i \neq 0 \quad i \text{ est d'ordre } 2$$

2)  $i$  est d'ordre 2 de  $\bar{i} = -i$  aussi,  $P$  est de la forme

$$P = (x-i)^2 (x+i)^2 (x^2+ax+b)$$

$$P = (x^2+1)^2 (x^2+ax+b)$$

$$= (x^4 - 2x^2 + 1)(x^2+ax+b)$$

la constante de  $P$  vaut 1 de  $b=1$

le coef des  $x$  vaut  $ax$  donc  $a=1$

$$P = (x-i)^2 (x+i)^2 (x^2+x+1) = (x-i)^2 (x+i)^2 (x-j)(x-\bar{j})$$

### Factorisation ds $\mathbb{R}[x]$

Retour sur la "formule clé"

$$(x-a)(x-\bar{a}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(a)x + |a|^2, \text{ montrer que le } \Delta \text{ est } < 0$$

$$\Delta = 4(\operatorname{Re}(a))^2 - 4|a|^2 = 4((\operatorname{Re}(a))^2 - |a|^2)$$

si  $a = \alpha + i\beta$ ,  $\Delta = 4(\alpha^2 - (\alpha^2 + \beta^2)) = -4\beta^2 < 0 \quad (\beta \neq 0)$

ex:  $P_1 = (x-1)^2 (x+j)(x+\bar{j}) = (x-1)^2 (x^2-x+1)$

$$P_2 = (x+2)(x-i)^2 (x+i)^2 = (x+2)(x^2+1)^2$$

$$P_3 = (x+1)(x-j)^2 (x-2)(x-\bar{j})^2 = (x+1)(x-2)(x^2+x+1)^2$$

Exercice Donner la factorisation unique sur  $\mathbb{R}[x]$

$$\circ P_1 = (2x+3)(x-j)^2 (-x+1)(x-\bar{j})^2$$

$$= (2x+3)(-x+1)(x^2+x+1)^2 = 2(x+\frac{3}{2})(-1)(x-1)(x^2+x+1)^2$$

$$= -2(x+\frac{3}{2})(x-1)(x^2+x+1)^2$$

$$P_2 = (x - e^{i\frac{\pi}{4}})^2 (3x-1)^2 (x - e^{-i\frac{\pi}{4}})^2 (2x+1)$$

$$= (3x-1)^2 (2x+1) (x^2 - \sqrt{2}x + 1)^2$$

$$= (3(x-\frac{1}{3}))^2 (2(x+\frac{1}{2})) (x^2 - \sqrt{2}x + 1)^2$$

$$= 18(x-\frac{1}{3})^2 (x+\frac{1}{2}) (x^2 - \sqrt{2}x + 1)^2$$

$$P_3 = -(x - e^{-i\frac{\pi}{4}})^2 (x+i)^2 (x - e^{i\frac{\pi}{4}})^2 (x-i)^2$$

$$= -(x^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 1)^2 (x^2 + i^2)^2$$

$$= -(x^2 + \sqrt{2} + 1)^2 (x^2 + 1)^2$$

# Relation d'équivalence

## 1. propriétés de l'égalité

L'égalité, en tant que relation possible entre 2 éléments d'un ensemble, présente les propriétés suivantes:

Reflexivité:  $\forall x \in E, x = x$

Symétrie:  $\forall x, y \text{ ds } E, x = y \Leftrightarrow y = x$

Transitivité: pour  $x, y, z \text{ ds } E, x = y \text{ et } y = z \Rightarrow x = z$

**Def:** Une relation binaire (entre 2 éléments) qui présente 3 propriétés est une relation d'équivalence

ex:  $R = \text{"a le même module que" ds } \mathbb{C}$

$x R y \Leftrightarrow |x| = |y|$ , d'après les propriétés de l'égalité il est clair que  $R$  est une relation d'équivalence.

Reflex:  $|x| = |x|$

Sym:  $|x| = |y| \Leftrightarrow |y| = |x|$

Trans:  $|x| = |y| \text{ et } |y| = |z| \Rightarrow |x| = |z|$

## Exemple d'autres relations d'équivalence

- \* Dans les vecteurs: colinéaire à
- \* Pour les droites: parallèle à
- \* Pour les entiers: a la même parité que

Faisons que la relation binaire définie sur  $\mathbb{Z}$  par  $x R y \Leftrightarrow n | x - y$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ) est une relation d'équivalence.

- $x R x \Leftrightarrow n | x - x \Leftrightarrow n | 0$  vrai car  $\forall n \in \mathbb{Z} \quad 0 = 0 \cdot n$
- $x R y \Leftrightarrow n | x - y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = kn$  donc  $y - x = (-k)n$  et  $n | y - x$  de  $y R x$
- Supposons qu'il existe  $k$  et  $l$  ds  $\mathbb{Z}$  tel que  
 $x - y = kn$      $y - z = ln$   
 $x - z = x - y + y - z = kn + ln = n(k+l)$  et  $n | x - z$  de  $x R z$

♥ La relation de congruence sur les entiers est une relation d'équivalence.

## **Def** Classe d'équivalence

Soit  $R$  une relation d'équivalence définie sur  $E$ .

Soit  $x$  ds  $E$  la classe de  $x$  notée  $\bar{x}$  est définie par  $\bar{x} = \{y \in E, x R y\}$

Soit  $x$  ds  $\mathbb{Z}$ , trouvons sa classe de congruence modulo  $n$ .  
 $x R y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = kn \Leftrightarrow y = x - kn$  ou  $\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z}, y \equiv x \pmod{n}\}$   
mais comme  $k$  peut prendre n'importe quelle valeur dans  $\mathbb{Z}$  de  
les 2 ensembles suivants sont égaux

$$\{x - kn, k \in \mathbb{Z}\} = \{x + kn, k \in \mathbb{Z}\} = \bar{x}$$

La relation de congruence sur  $\mathbb{Z}$  est compatible avec l'addition, soustraction, multiplication, élévation à une puissance non nulle.

1)  $a = b [n]$  et  $c = d [n] \Rightarrow ac = bd [n]$

2)  $a = b [n] \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, ka = kb [n]$

3)  $a = b [n]$  et  $c = d [n] \Rightarrow a + c = b + d [n]$

4)  $a = b [n] \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, a^k = b^k [n]$

Exemple Résoudre

$3x = 2 [5]$ , on essaye toutes les valeurs de  $x$  modulo 5 (on dit aussi, le modulo, le résidu ou le reste)

|                        |   |   |   |   |          |
|------------------------|---|---|---|---|----------|
| $x \text{ modulo } 5$  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4        |
| $3x \text{ modulo } 5$ | 0 | 3 | 1 | 4 | <u>2</u> |

$3x = 2 [5] \Leftrightarrow x = 4 [5]$

Ex-a) Trouver la classe modulo 5 dont les éléments  $x$  vérifient  $x + 3 = 2 [5]$

b) Noter cette classe en extension (façon Diophante)

c) quel est le + petit élément de cette classe supérieur à 100?

|                                                 |              |              |              |              |              |
|-------------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <del><math>x \text{ modulo } 5</math></del>     | <del>0</del> | <del>1</del> | <del>2</del> | <del>3</del> | <del>4</del> |
| <del><math>x + 3 \text{ modulo } 5</math></del> | <del>3</del> | <del>4</del> | <del>0</del> | <del>1</del> | <del>2</del> |

Quand le résultat  
 $x = -w [n]$   
 $= kn - w [n]$

a)  $x + 3 = 2 [5] \Leftrightarrow x = -1 [5] = 4 [5]$

b)  $\overline{4} = \{4 + 5k, k \in \mathbb{Z}\}$  écriture Classe d'équivalence

c) quel est le + petit élément de la forme  $4 + 5k$  supérieur 100

$4 + 5k \geq 100$

$5k \geq 96$

$k \geq 96/5 \approx 19,2$  on arrondit à la valeur du dessus

$k \geq 20$

$k = 20$  soit le + petit élément est 104.

Ex 2.1 \* Résoudre  $3x = 2 [7]$

a)

|                        |   |   |   |          |   |   |   |
|------------------------|---|---|---|----------|---|---|---|
| $x \text{ modulo } 7$  | 0 | 1 | 2 | 3        | 4 | 5 | 6 |
| $3x \text{ modulo } 7$ | 0 | 3 | 6 | <u>2</u> | 5 | 1 | 4 |

↳ réponse :  $3x = 2 [7]$

$$3x \equiv 2 [7] \Leftrightarrow x \equiv 3 [7]$$

$$\bar{x} = \{3 + 7k, k \in \mathbb{Z}\}$$

\*  $5x = 3 [7]$

|          |   |   |          |   |   |   |   |
|----------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $x [7]$  | 0 | 1 | 2        | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $5x [7]$ | 0 | 5 | <u>3</u> | 1 | 6 | 4 | 2 |

$$5x \equiv 3 [7] \Leftrightarrow x \equiv 2 [7]$$

$$\bar{x} = \{5 + 7k, k \in \mathbb{Z}\}$$

\*  $x^2 = 2 [5]$

|           |   |   |   |   |   |
|-----------|---|---|---|---|---|
| $x [5]$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $x^2 [5]$ | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 |

Aucune classe d'équivalence  
De aucun entier ne convient  $S = \emptyset$

\*  $4x = 4 [6]$

|          |   |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| $x [6]$  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $4x [6]$ | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |

\*  $x^3 = 3 [6]$

|           |   |   |   |   |   |   |
|-----------|---|---|---|---|---|---|
| $x [6]$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $x^3 [6]$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2 classes ou  $4x \equiv 4 [6] \Leftrightarrow x \equiv 1 [6] \vee x \equiv 4 [6]$

$$x^3 \equiv 3 [6] \Rightarrow x \equiv 3 [6]$$

qui signifie  $x \in \bar{1} \vee \bar{4}$

ou exclusif car  $\bar{1} \cap \bar{4} = \emptyset$

Ex 2.2 Pour quelles valeurs de  $k$   $\frac{k^3 + k - 2}{k^3 + k - 2}$  est il multiple 4?  
b)

|               |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|
| $k [4]$       | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $k^3 + k - 2$ | 2 | 0 | 0 | 0 |

|               |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|
| $k [7]$       | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $k^3 + k - 2$ | 5 | 0 | 1 | 0 | 3 | 2 | 3 |

On écrit  $f(0) = -2 = 2 [4]$

$f(1) = 0 = 0 [4]$

$f(2) = 8 + 2 - 2 = 8 = 0 [4]$

$f(3) = 27 + 3 - 2 = 28 = 0 [4]$

$f(0) = 0 + 0 - 2 = 5 [7]$

$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0 [7]$

$f(2) = 8 + 2 - 2 = 8 = 1 [7]$

$f(3) = 28 = 0 [7]$

$f(4) = 64 + 4 - 2 = 3 [7]$

$f(5) = 125 + 5 - 2 = 2 [7]$

$f(6) = 220 = 3 + 2 \cdot 7 = 3 [7]$

Ex Application des règles de calcul  
quel est le chiffre des unités de  $3^{12}$ ?

$$3^2 = 9 \quad 3^3 = 27 \quad 3^4 = 81 = 1[10]$$

$$(3^4)^3 = 1[10] \quad 3^{12} = 1[10] \text{ soit } a_0 \text{ est } 1.$$

$$n = \overbrace{a_m \dots a_1 a_0}^{10} = a_m 10^m + \dots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

multiple de 10

Ex C'est il vrai que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $7^{2n} + 3$  est multiple de 4?

$$7^{2 \cdot 0} + 3 = 4$$

$$49 + 3 = 52$$

$$49 = 1 + 48 = 1[4]$$

$$\mathbb{Z} = \{2 + 4k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$7^2 = 1[4] \Rightarrow 7^{2n} = 1^n = 1[4]$$

$$7^{2n} + 3 = 1 + 3 = 0[4]$$

Ex Si  $n = \overbrace{a_m \dots a_1 a_0}^{10}$ , après avoir remarqué que  $n = a_0[2]$

montrer que  $2|n \Leftrightarrow a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Si  $b$  est multiple de  $a$ , l'ensemble des multiples de  $b$  est inclus dans celui des multiples de  $a$ .

ici,  $10$  multiple de  $2$  est multiple de  $2$ .

$$\text{dc } n = a_0[2]$$

$$2|n \Leftrightarrow n = 0[2]$$

$$n = 0[2] \Leftrightarrow a_0 = 0[2] \text{ comme } a_0 \in [0, 9] \text{ on a}$$

$$a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

Ex On note fts  $n = \overbrace{a_m \dots a_1 a_0}$  montrer que :

$$3|n \Leftrightarrow 3|a_0 + a_1 + \dots + a_m$$

$$3|n \Leftrightarrow n = 0[3]$$

$$n = 0[3] \Leftrightarrow a_0 = 0[3]$$

$$a_0 \in \{0, 3, 6, 9\}$$

$$n = 0[3] \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_m = 0[3]$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 10^k = 1[3]$$

$$n = a_0 10^0 + a_1 10^1 + \dots + a_k 10^k + \dots + a_m 10^m$$

$$10^0 = 1[3]$$

$$10^1 = 1[3]$$

$$10^k = 1[3]$$

$$a_0 10^0 = a_0[3] \text{ on fait l'addition}$$

$$a_1 10^1 = a_1[3]$$

$$a_k 10^k = a_k[3]$$

$$n = a_0 + a_1 + \dots + a_k + \dots + a_m[3]$$

On a montré  $n = a_0 + a_1 + \dots + a_m[3]$

$$\text{dc } n = 0[3] \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_m = 0[3]$$

Ex Critère de divisibilité par 11  
 Montrer que  $11 \mid n \Leftrightarrow (-1)^m a_m + \dots + (-1)^k a_k + \dots + (-1)^1 a_1 + (-1)^0 a_0 = 0 \quad [11]$

$$\Downarrow n = 0 \quad [11] \Leftrightarrow (-1)^0 a_0 + (-1)^1 a_1 + \dots + (-1)^m a_m = 0 \quad [11]$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 10^k = -1 \quad [11]$$

$$\text{On multiplie } a_k 10^k = (-1)^k a_k \quad [11]$$

$$\text{On additionne } n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_m 10^m$$

$$\Leftrightarrow (-1)^0 a_0 + \dots + (-1)^m a_m \quad [11]^m$$

D'où la conclusion

$$n = -1 \quad [11] \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_m = 0 \quad [11]$$

-1 par que

$$10^k = 11 - 1$$

$$\text{ex } 10^1 = 11 - 1$$

$$10^2 = 11^2 - 2$$

## Implication, Contraposée

Si on note  $\neg$  la négation, et  $\vee$  la disjonction (ou logique)  
 l'implication  $\Rightarrow$  déjà utilisée en math depuis longtemps peut  
 s'écrire  $\bar{A} \vee B$  au lieu de  $A \Rightarrow B$

La contraposée de  $A \Rightarrow B$  est  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$  elles ont même valeur  
 de vérité, tel que elles sont équivalentes.  $\Delta$  en inverse  $A$  et  $B$

Preuve:  $(\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$  on utilise la définition avec  $\bar{B}$  et  $\bar{A}$

$$\bar{B} \vee \bar{A} = B \vee \bar{A} = \bar{A} \vee B \text{ soit } A \Rightarrow B$$

conclusion

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$$

Ex: Utiliser la contraposée pour montrer  $n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$

$$n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair}$$

$$n = 1 \quad [2] \Rightarrow n^2 = 1^2 \quad [2]$$

Utiliser la contraposée de  $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \Rightarrow$  **À Connaître**

$$A \Rightarrow B \text{ contraposée } \bar{B} \Rightarrow \bar{A} : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

## Application, injection, surjectivité

Produit cartésien soient  $E$  et  $F$  2 ensembles définis

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

ex: Sur ensemble fini

$$E = \{1, 2, 3\} \quad F = \{a, b\}$$

$$E \times F = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

ensemble  $\infty$  Si  $E = F = \mathbb{R} \quad E \times E = E^2 = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$

Graphes soient  $E$  et  $F$  2 ensembles graphes de  $E$  de  $F$

Tout sous ensemble de  $G$  de  $E \times F$

ex:  $G_1 = \{(1, a), (1, b)\}$  et  $G_2 = \{(2, a), (2, b)\}$  sont des graphes de  $E$  dans  $F$

Graphes applicatifs Un graphe  $G$  de  $E \times F$  est dit applicatif lorsque pour  $\forall x$  de  $E$ , il existe un unique  $y$  dans  $F$  tel que  $(x, y) \in G$ .

Rmq:  $G_1$  n'est pas applicatif car pour  $x=1$  il n'y a pas de  $(x, y)$  de  $G_1$  et pour  $x=2$  il y a 2 couples  $(x, y)$  de  $G_1$

$G = \{(1, b), (2, a), (3, b)\}$  est applicatif

$H = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$  est applicatif

Def On appelle application de  $E$  dans  $F$   $\forall$  graphe applicatif de  $E$  de  $F$

## Injectivité

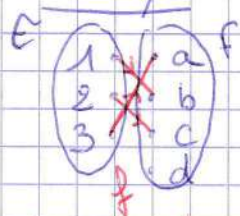
Une application  $f: E \rightarrow F$  est dite injective lorsque pour tout

$(x_1, x_2)$  de  $E^2$  on a  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ , qui peut aussi

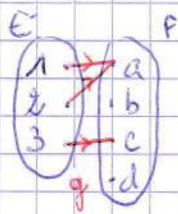
s'écrire par la contraposée  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

On peut aussi dire que tout élément de  $F$  admet au plus un antécédent par  $f$  dans  $E$

exemple

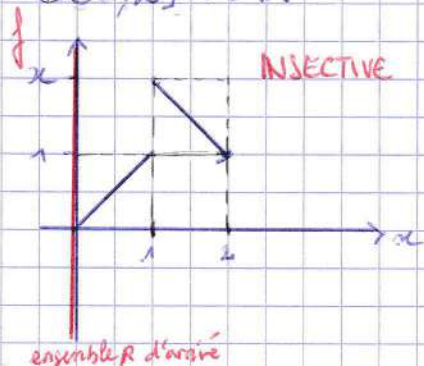


$f$  est injective

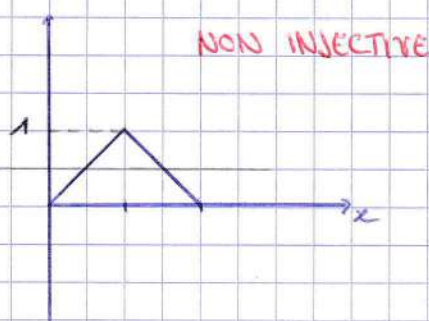


$g$  n'est pas injective

$E = [0, 2]$   $F = \mathbb{R}$



$E = [0, 2]$   $F = \mathbb{R}$



## Exercice

Soit  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, x \mapsto \frac{1}{x}$

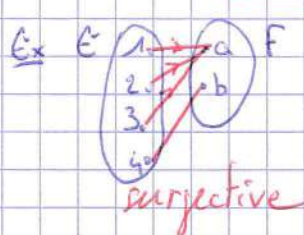
- a) On considère,  $x_1$  et  $x_2$  de  $\mathbb{R}^*$ , réduisez  $f(x_1) - f(x_2)$  au même dénominateur.  
 b) Si  $f(x_1) = f(x_2)$  que peut-on dire  $x_1$  et  $x_2$ ?

a)  $f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$

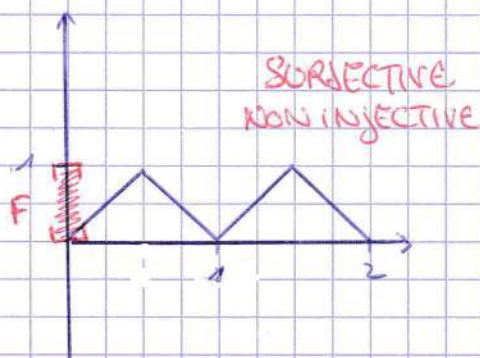
b)  $f(x_1) = f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1$

## Surjectivité

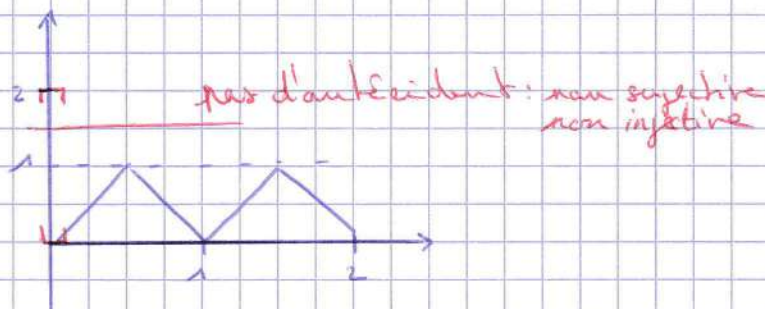
Une application  $f: E \rightarrow F$  est dite surjective ssi pour  $\forall y$  de  $F$ , il existe au moins un antécédent de  $y$  par  $f$  de  $E$ .



$E = [0, 2]$   $F = [0, 1]$

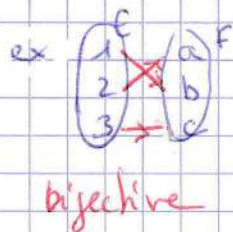


$E = [0, 2]$   $F = [0, 2]$

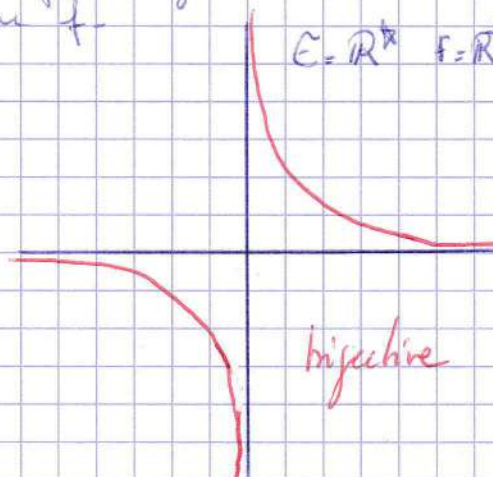


## Bijective

une application  $f: E \rightarrow F$  est bijective ssi elle est injective ET surjective.  
 On peut aussi dire  $f$  est bijective ssi  $\forall$  élément de  $F$  admet exactement un antécédent de  $E$  par  $f$ .



$E = \mathbb{R}^* \quad F = \mathbb{R}^*$



$E = \mathbb{R} \quad F = \mathbb{R}_+^*$

