

Projet Algorithmique et Langage C

Informatique et calculs

DESCRIPTION DU PROJET	1
PARTIE 1 : QUELQUES CALCULS SIMPLES	1
LES NOMBRES PREMIERS	1
LES NOMBRES DE SMITH (OU NOMBRES RIGOLOS)	2
PARTIE 2 : QUELQUES COURBES	2
INTERVALLE, PAS ET ECHANTILLONNAGE	2
INTERVALLE	2
PAS ET ECHANTILLONNAGE	3
PAS D'ECHANTILLONNAGE DE LA COURBE	4
FONCTIONS ET COURBES A TRAITER	4
FONCTIONS $Y = F(X)$	4
DONNEES A COLLECTER	5
FONCTIONS $Y=F(X)$	5
TRAVAIL A EFFECTUER	5
PROGRAMMES	5
RAPPORT DE PROJET	5
PLANNING DU PROJET	6
DISTRIBUTION DU PROJET	6
SEANCE DE TP PROJET	6
SOUTENANCE DE PROJET	6
ANNEXE	7

Description du projet

Le but de ce projet est de montrer qu'un ordinateur est avant tout une calculatrice destinée à effectuer des opérations numériques (c'est-à-dire des calculs avec des nombres) et non symboliques (des démonstrations mathématiques utilisant des symboles, des variables, des fonctions). Les calculatrices scientifiques utilisent en fait de petits algorithmes et programmes pour obtenir les résultats des calculs de fonctions.

Partie 1 : Quelques calculs simples

Les nombres premiers

Un nombre est dit premier si c'est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs (qui sont alors 1 et lui-même). 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur entier positif ; 0 non plus car il est divisible par tous les entiers positifs.

1/ Ecrire un programme qui trouve les 10 plus petits nombres premiers.

2/ Un nombre premier est dit « *de Pythagore* » s'il s'écrit de la forme $(4n + 1)$, où n est un entier naturel. Par exemple, 5, 13, 17 sont des nombres premiers de Pythagore.

Ecrire un programme qui identifie les nombres de Pythagore parmi les 10 plus petits nombres premiers trouvés dans la question 1.

Selon le théorème des deux carrés, ces nombres premiers sont les seuls nombres premiers impairs que l'on peut écrire comme somme de deux carrés. Vérifier cette propriété sur les nombres Pythagore trouvés.

3/ De nombreuses formules ont été cherchées pour générer les nombres premiers. Par exemple, le théorème de *Wilson* assure que p est un nombre premier si et seulement si

$$(p - 1)! \equiv -1 \mod p$$

Il s'ensuit que la fonction $f(n) = 2 + \left(2 \left((n - 1)! \right) \mod (n) \right)$ vaut n si n est un nombre premier et vaut 2 sinon.

Utiliser cette méthode pour trouver les 10 plus petits nombres premiers.

Comparer cette méthode avec celle utilisée dans la question 1.

Les nombres de Smith (ou nombres rigolos)

Un nombre entier est dit de Smith ou rigolo si la somme de ses chiffres est égale à la somme des chiffres de ses facteurs premiers.

Rappel : tout entier peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers, qui sont appelés facteurs premiers.

Exemple : $12 = 3 \times 4 = 3 \times 2 \times 2$ (3 et 2 sont premiers). Les facteurs premiers de 12 sont donc 2, 2 et 3.

Ecrivez un programme qui détecte tous les nombres de Smith entre 1 et 1000, et qui indique combien de nombres de Smith ont été détectés. Le programme devra également détecter les nombres de Smith jumeaux, c'est à dire deux nombres consécutifs qui sont des nombres de Smith.

Exemples :

1776 est un nombre de Smith : $1 + 7 + 7 + 6 = \mathbf{21}$

$1776 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 37$, ce sont ses facteurs premiers

Et $2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 7 = \mathbf{21}$

Note : les nombres premiers sont des nombres de Smith triviaux et ne sont pas à compter dans la liste des nombres de Smith.

Partie 2 : Quelques courbes

Intervalle, pas et échantillonnage

Intervalle

Pour obtenir un graphe de fonction par ordinateur (ou avec une calculatrice), il n'y a pas d'autres solution que de générer un ensemble de points, puisque les ordinateurs ne peuvent pas représenter exactement les nombres réels, et donc les notions de continuité, de dérivabilité, de fonctions, leur sont inaccessibles.

Un graphe de fonction nécessite la définition d'un intervalle de valeurs à l'intérieur duquel on choisira les abscisses des points à générer : cet intervalle sera défini par sa borne inférieure et sa borne supérieure.

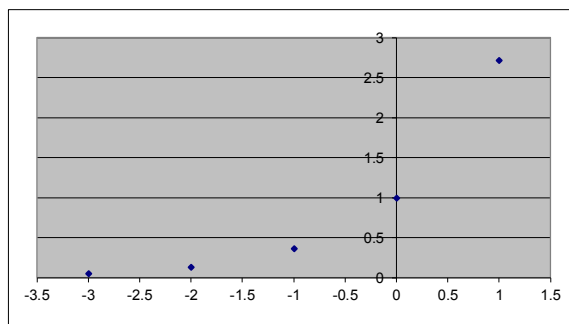
Par exemple, pour obtenir un graphe de la fonction $y=e^x$, on doit préciser que x est compris entre deux bornes (par exemple, $x \in [-2,5;+3,2]$).

Dans la suite de l'énoncé, les bornes de l'intervalle seront nommées *min* pour la borne inférieure et *max* pour la borne supérieure.

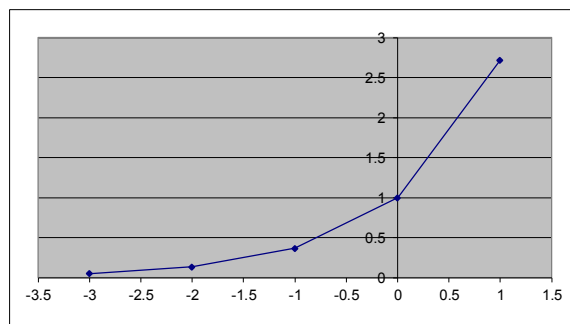
Pas et échantillonnage

La deuxième information nécessaire est le nombre de points qu'il faut générer pour obtenir le graphe : plus ce nombre de points est élevé, plus l'allure du graphe se rapprochera de la courbe mathématique de la fonction. Si le nombre de points est très faible, le graphe sera constitué de quelques points, ou, si ces points sont reliés entre eux, de quelques segments de droite.

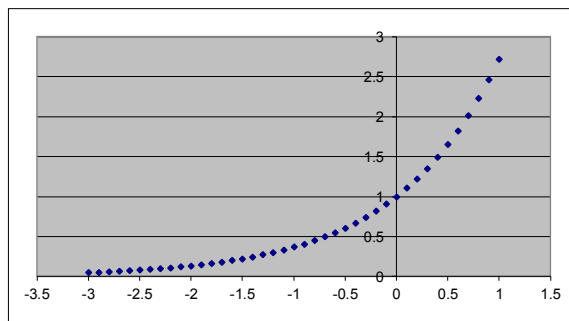
Les 4 graphes suivants (issus d'Excel), illustrent cet exemple. La fonction traitée est l'exponentielle ($y=e^x$), l'intervalle choisi pour x est $[-3;+1]$.



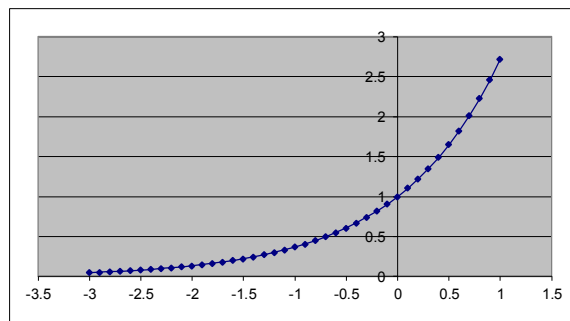
5 points, graphe de points



5 points, graphe de segments



50 points, graphe de points



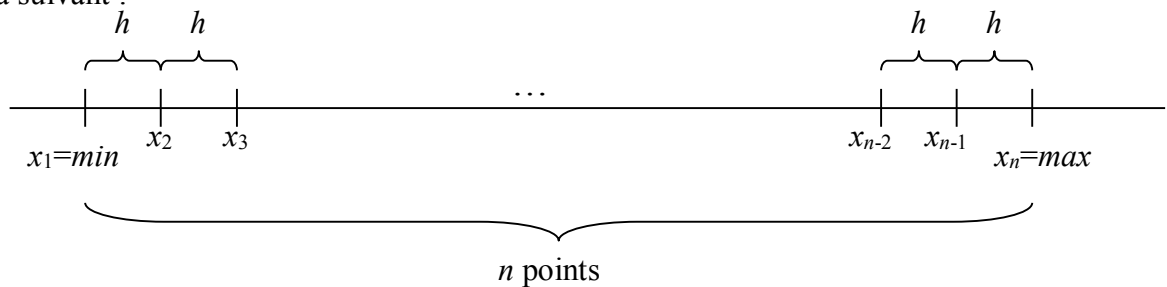
50 points, graphe de segments

Choisir un certain nombre de points pour représenter une courbe ou un signal continu s'appelle **échantillonner** la courbe. Le nombre de points est appelé : nombre de points d'échantillonnage.

Pas d'échantillonnage de la courbe

L'étape suivante consiste à calculer les coordonnées des points dans l'intervalle $[min; max]$. Nommons ces points en leur attribuant un indice (ou numéro d'ordre), le point d'indice i sera noté : x_i . La valeur de n , nombre de points d'échantillonnage, est supposé connue.

Les n points doivent être placés de manière régulière tout au long de l'intervalle, bornes comprises. On sait déjà que $x_1 = min$ et que $x_n = max$ (le premier point correspondra à la borne inférieure de l'intervalle, le dernier à la borne supérieure de l'intervalle). D'où le schéma suivant :



L'espace h entre deux points consécutifs est constant, et est nommé le pas d'échantillonnage. il est facile d'en déduire que, pour un indice i compris entre 1 et $n-1$, $x_{i+1} = x_i + h$ (ou encore, $x_{i+1} = x_1 + i.h$).

La valeur du pas h peut être obtenu à l'aide de min , max et n . A vous de trouver la bonne formule de calcul !

Fonctions et courbes à traiter

Pour les différents courbes et fonctions, on suppose que l'on ne peut utiliser que les quatre opérations de base $+$ $-$ $*$ $/$, ainsi que les tests et les boucles. Vous trouverez en annexe la manière de calculer les fonctions plus complexes à partir des 4 opérations de base.

Fonctions $y = f(x)$

$y = a.x^2 + b.x + c$, les valeurs de a , b et c sont laissées à votre choix;

$y = a.x^3$, la valeur de a est laissée à votre choix;

$$y = e^x;$$

$$y = \cos(x);$$

$$y = \cos(x^2);$$

$$y = \sqrt{x};$$

Faites bien attention aux domaines de définition de ces fonctions pour les intervalles !

Données à collecter

Fonctions $y=f(x)$

Vous devez obtenir un ensemble de points $(x; y)$, chaque ligne doit contenir un couple : exemple pour $y=\sqrt{x}$, $x \in [1;2]$, avec $n = 4$ points :

```
1.000000000 1.0000000  
1.333333333 1.154700538  
1.666666667 1.290994449  
2.000000000 1.414213562
```

Vous vous servirez du tableur Excel pour importer ces fichiers et les visualiser avec l'aide du grapheur intégré.

Travail à effectuer

Il s'agit d'un travail **individuel** et un rapport de projet doit être joint aux programmes.

Programmes

Pour éviter d'avoir un seul programme qui comporterait beaucoup de lignes et qui serait donc très dur à maintenir, vous ferez un programme par fonction mathématique ou courbe paramétrée.

Rapport de projet

Votre rapport est à remettre le jour de la soutenance. Il comprendra : une introduction originale (c'est à dire de votre cru), des captures d'écran des graphes obtenus, une conclusion pertinente, ainsi que des explications claires (en français et en langage algorithmique). N'oubliez pas d'inclure à votre rapport toutes les parties demandées dans le sujet du projet, notamment l'analyse des résultats.

Votre rapport doit contenir un sommaire numéroté, des pages numérotées, une mise en page cohérente. Certains aspects plus techniques que vous souhaiteriez exposer seront mis en annexe. Des paragraphes de transition seront également bienvenus.

Vous déposerez également une version électronique de votre projet et de votre rapport sur Campus EFREI pour le mercredi 20 Novembre 2013 à 20h **DERNIER DELAI**. Attention aux embouteillages sur le serveur : **la date et l'heure de fermeture de l'espace Campus EFREI pour le dépôt des fichiers correspond à l'heure à laquelle le dépôt de vos fichiers doit être terminé ! Aucune réclamation sur le dépôt des fichiers ne sera acceptée.**

Planning du projet

Distribution du projet

Le 25 Octobre 2013

Séance de TP Projet

Une séance de TP sera consacrée au démarrage du projet. Cette séance de TP est prévue le mercredi 06 Novembre 2013.

Soutenance de projet

4 heures (par groupe) y seront consacrées le mercredi 20 Novembre 2013.

Pour la soutenance, un ordre de passage sera disponible sur Campus EFREI.

Annexe

Calculs de fonctions

Voici quelques formules permettant de calculer certaines fonctions classiques :

a) calcul de racine carrée : par la méthode de Héron d'Alexandrie (il s'agit en fait de la méthode de Newton appliquée au cas particulier de la racine carrée) :

$$\text{La suite } \begin{cases} U_0 = A \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 + A}{2U_n} \end{cases} \text{ converge rapidement vers } \sqrt{A}.$$

Une quinzaine d'itérations suffisent à donner un très bon résultat.

b) calcul de l'exponentielle

On utilise le développement en série entière de la fonction exponentielle, qui indique

que $e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$. On peut donc réaliser ce calcul en choisissant une valeur limite pour i (20

est une bonne valeur). Attention, pour le calcul de $x^i/i!$, on ne recalcule pas cette quantité à chaque fois, car la factorielle dépasse vite les capacités de calcul de l'ordinateur, mais on se base sur l'égalité suivante : $\frac{x^i}{i!} = \frac{x}{i} \cdot \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$

c) calcul de sin(x)

On utilise un développement en série entière (on prendra soin de faire un modulo et éventuellement un changement de variable avant le calcul pour faire en sorte que x soit compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$). $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \cdot \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$. Attention, il ne faut pas recalculer chaque terme, car $(2i+1)!$ dépasse très vite les capacités de calcul de la machine. Il vous faudra utiliser la relation suivante :

$$\underbrace{(-1)^i \cdot \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}}_{\text{Terme au rang } i} = \left[-1 \cdot \frac{x^2}{(2i)(2i+1)} \right] \cdot \underbrace{(-1)^{i-1} \cdot \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}}_{\text{Terme au rang } i-1}$$

Pour obtenir des résultats corrects, utilisez i jusqu'au rang 30.