

$$\text{Ex 1: } \Delta \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{grad} \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) + \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

$$1) \cdot \Delta \vec{E} = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) + \text{rot}(\text{rot}(\vec{E}))$$

$$\text{grad} \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot}(\vec{E}))$$

$$\Delta \vec{E} = \text{grad} \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \rightarrow \text{équation de Maxwell}$$

$$2) \Delta \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{grad} \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) + \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \rightarrow \left[\frac{1}{\epsilon} \text{grad}(\rho) + \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right]$$

2) - Vide $\rightarrow$ pas de charge ($\rho = 0 \text{ (C/m}^3\text{)}$) pas de courant ($\vec{j} = 0 \text{ (A/m}^2\text{)}$)

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\text{Unité: } \Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \mu_0 \epsilon_0 = \frac{\Delta \vec{E}}{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$\rightarrow \text{Donc } \mu_0 \epsilon_0 \text{ a l'unité } \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \rightarrow \frac{1}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \text{ homogène à } \frac{1}{c^2}$$

$$\rightarrow \text{Donc } \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \rightarrow \left[c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \right] \rightarrow \text{célérité des OEP}$$

$$3) \vec{E}(y, z, t) = E_0 \cos(ky - \omega t) \vec{e}_y$$

$$\Delta \vec{E}(y, z, t) = -k^2 \vec{E}(y, z, t)$$

$$\text{Ex 2: } \vec{E}(y, z, t) = (E_0 \vec{e}_y - \sqrt{3} E_0 \vec{e}_z) \cos\left(\pi \frac{\sqrt{2}}{2} (y + z) - \omega t\right)$$

1) $\vec{E}$ dépend de y et z (y, z)

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ -\sqrt{3} E_0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow k = \left(\pi \frac{\sqrt{2}}{2}, \pi \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$E_0 = \sqrt{E_{0y}^2 + E_{0z}^2} = \sqrt{(E_0)^2 + (-\sqrt{3} E_0)^2} = E_0 \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = E_0 \sqrt{4} = 2 \times 10^3 \text{ V.m}^{-1}$$

$$k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{\left(\pi \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\pi \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \left[\pi \sqrt{2} \text{ rad.m}^{-1} \right]$$

$$2) \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\sqrt{\epsilon}}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\sqrt{12}}} = \frac{\sqrt{12}}{1} \approx 1 \text{ m (onde radio)}$$

$$\omega = kc = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 3 \cdot 10^8$$

$$= \left[\frac{6}{\lambda} \cdot 10^8 \text{ rad s}^{-1} \right]$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6/\lambda \cdot 10^8} = \frac{2\pi}{6/\sqrt{12} \cdot 10^8} = \frac{2\pi \sqrt{12}}{6} \cdot 10^{-8} = \frac{\pi \sqrt{12}}{3} \cdot 10^{-8}$$

3) On a $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (3^{ème} équation de Maxwell)

notule compléte: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ($\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -(-i\omega) \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

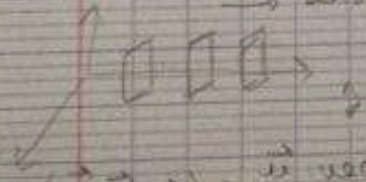
$\vec{B}_0$

Ex 3: $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ et $R = 1 \text{ mm}$

OPPS monochromatique sur (Oy)

1) $\vec{S}$

→ sens de propagation



$(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u})$ forme trièdre direct car $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont versés

$\vec{E}$ et $\vec{B} \perp$ axe de propagation

$\vec{E} \perp \vec{B}$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu}$$

Pour l'OPPS

↳ $\mu = \mu_0$ (vide)

$\vec{E} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{E} \times \vec{B} = EB \vec{u}$

↳ $\vec{S} = \frac{EB}{\mu_0} \vec{u}$, $\vec{S}$ est colinéaire à l'axe de propagation donc $\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires à l'axe de propagation

2) Puissance de rayonnement

* 2^{ème} cas : onde émet de toutes les directions (isotropie)

$$P_{\text{rayon}} = \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{E} \quad \text{axe propa: sur } (Oy) \rightarrow \vec{E} = E_0 \cos(ky - \omega t) \hat{y}$$

$$\vec{B} = B_0 \cos(ky - \omega t) \hat{z}$$

$$P_{\text{rayon}} = \oint_S S(r, t) dE = S(r, t) \oint_S dE$$

Surface totale d'échelle de rayon r : $4\pi r^2$ (cas 1)
 (cas 2) : $2\pi r^2$ (cas 3) spécial

E = section du faisceau traversé par le vecteur $\vec{S}$

$$E = \pi r^2$$

$\vec{S}$ colinéaire à l'axe de propagation $\rightarrow \vec{S}$ sur Oy
 et $\vec{E} = c\vec{B}$ $E \perp Oy$ (E transversale)
 $B \perp Oy$ (B transversale)

$$\vec{S} \cdot d\vec{E} \text{ est et n'est } \rightarrow \vec{S} \cdot d\vec{E} = S dE \cos(\theta) = S(r, t) dE$$

$$P_{\text{ray}} = \oint_S S(r, t) dE = S(r, t) \oint_S dE$$

$$= S(r, t) \pi r^2 = E_0 c \cos^2(ky - \omega t) \pi r^2$$

$$= E_0 c \cos^2(ky - \omega t) \pi r^2$$

$$P_{\text{ray max}} = E_0 c \pi r^2 \text{ et } P_{\text{ray moy}} = \frac{E_0 c \pi r^2}{2}$$

Ex4: 1) $\text{div}(\vec{B}) = 0$

Les lignes de $\vec{B}$ ne divergent jamais, l'eq. fondamentale: $\vec{B}$ est l'induction magnétique. Le flux mag. dans une surface fermée est $\Phi_B = 0$.

Equation locale de la propriété fondamentale de $\vec{B}$:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ (th de Oersted)}$$

2) $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$: th de Gauss-Faraday

Equation locale du th de Gauss (transformé à l'aide du th Oersted)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

3) $E_r(r) = \frac{k}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^3}{5R^2} \right)$ $\vec{E} \begin{pmatrix} ER \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ER \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(E_r) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \phi}(E_r) = 0 \end{cases}$

On utilise l'eq de Maxwell $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

quelque

$$\rho = \epsilon_0 \text{div}(\vec{E})$$

$$\rho = \epsilon_0 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) \right] \quad \text{2^{es} composantes cylindriques}$$

$$\rho = \epsilon_0 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{k}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^3}{5R^2} \right) \right) \right] = \frac{k}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^5}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right) \right)$$

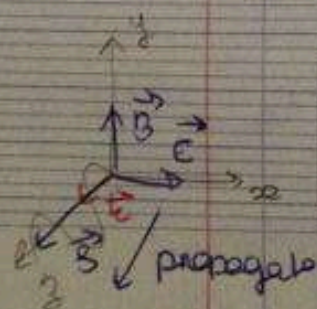
$$= k \left(\frac{1}{r^2} \left(\frac{5r^4}{3} - \frac{5r^4}{5R^2} \right) \right)$$

$$\boxed{\rho(r) = k \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)}$$

La sphère est chargée avec (densité variable $\rho(r)$) qui diminue de $0 \rightarrow R$.

Ex5 OENPPS d'axe Oy avec $E_0 = 6^3 \text{ Vm}^{-1}$

1) Propriété: $\mu = \mu_0(\text{vide})$, $\vec{E} \perp \vec{B} \rightarrow \vec{E} \wedge \vec{B} = c \vec{u}$



$(\vec{E}, \vec{B})$ dans $(x, y) \rightarrow (\vec{u}, \vec{B}, \vec{E})$ tous les trois

TAI

Ex 5 (suite)

2) $\vec{S} = \frac{e \hbar}{4\pi m_e} \vec{\sigma}$ $\rightarrow$ $\vec{S}$ double μ_B

$\vec{S} = \frac{e \hbar}{4\pi m_e} \vec{\sigma}$

3) $\rho = \frac{1}{V} \int \vec{S} d\vec{e}$



$\rho = \frac{1}{V} \int \vec{S} d\vec{e}$

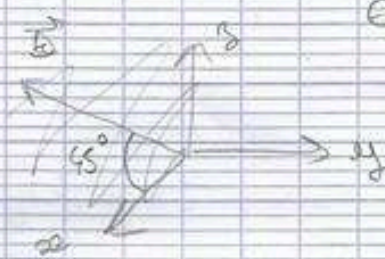
$\frac{1}{m_e} E = \text{scalo du } \vec{p} \text{ lauché par } \vec{S}$

$E = \hbar \omega$

$\vec{S} = \frac{e \hbar}{4\pi m_e} \vec{\sigma}$

Ex 6 : Une onde électromagnétique lumineuse (PPS) se propage de l'air suivant $\vec{D}$ du plan (xoz) qui fait l'angle $\alpha = 45^\circ$ avec l'axe Ox .

1) Composantes de $\vec{k}$ en f° de k . Calculer λ , ω et ϕ , sachant que $k = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 10^3 \text{ rad.m}^{-1}$



$$\vec{E}(x, y, t) = E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y$$

$$E_0 = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}$$

$\vec{E}$ dépend des variables de x et z , donc $\vec{E}$ se propage dans le plan (xoz)
 spéciales

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$$

Sachant que $k = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 10^3 \text{ rad.m}^{-1}$ (norme du vecteur d'onde $\vec{k}$)
 . λ ? $k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 10^3} = \frac{1}{10^3} \cdot 10^6 = 10^{-3} \cdot 10^6 = 10^3 \text{ m} = 1 \text{ km}$

Spectre $\rightarrow$ Visible $[0,4 - 0,8 \mu\text{m}]$

$$\omega? \quad \omega = kc = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 3 \cdot 10^8 = \frac{2\pi}{10^3} \cdot 3 \cdot 10^8 = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^5 = 6\pi \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$T? \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6\pi \cdot 10^5} = \frac{1}{3 \cdot 10^5} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

$$\phi? \quad \phi = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6\pi \cdot 10^5}{2\pi} = 3 \cdot 10^5 \text{ Hz}$$

$$2) \quad \vec{E}(y, t) = \begin{cases} E_{0x}(y, t) = E_{0x} \cos(ky - \omega t) \\ 0 \\ E_{0y}(y, t) = E_{0y} \cos(ky - \omega t) \end{cases}$$

3)

Ex 7: 1) Onde propageant sur l'axe Oy et polarisée linéairement à $\frac{\pi}{3}$ de l'axe (Ox).

$$\frac{E_y}{E_x} = \tan \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(y, t) = \begin{pmatrix} E_0 \cos \frac{\pi}{3} \cos(ky - \omega t) \\ E_0 \sin \frac{\pi}{3} \cos(ky - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Onde selon Oy et pol elliptiquement à gauche, le $\frac{1}{2}$ grand axe de l'ellipse sur l'axe (Oy) étant $3x$ et gd que le demi petit axe.

gd axe suivant Oy
 $\Rightarrow E_{oy} = 3E_{ox}$

$$\vec{E}(y, t) = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - ky) \\ 3E_0 \sin(\omega t - ky - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Onde polarisée linéairement sur Oy , se propageant sur (z ou Oz), de dir° de droite ($\circ$) avec l'angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe (Oy).

$$\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(z, t) \\ E_x(z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_0 \cos(kz - \omega t) \end{pmatrix}$$

Ex 8: 1) a) $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\alpha) \cos(ky - \omega t) \\ E_0 \sin(\alpha) \cos(ky - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = E_0 \cos(\alpha) \cos(ky - \omega t) \\ E_y = E_0 \sin(\alpha) \cos(ky - \omega t) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = E_0 \cos(\alpha) \cos(ky - \omega t) \\ E_y = E_0 \sin(\alpha) \cos(ky - \omega t) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} E_{0x} = E_0 \cos(x) \\ E_{0y} = E_0 \sin(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{dépend de } y \\ \text{la phase} = (ky - \omega t) \text{ pas de déphasage} \\ E_{0x} \neq E_{0y} \rightarrow \text{pas pol circulaire} \end{array}$$

$$\frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \frac{E_0 \sin(x)}{E_0 \cos(x)} = \tan(x)$$

↳ polarisation rectiligne

$$b) \vec{E}_2 = \begin{cases} E_x = E_0 \cos(ky - \omega t) \\ E_y = E_0 \sin(ky - \omega t) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

phase $= (ky - \omega t)$ et dépend de y (direct° de propagation)
Soit $\alpha = ky - \omega t$ et $\beta = -\alpha = \omega t - ky$

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \cos(-\beta) = \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) = \sin(-\beta) = -\sin(\beta) = \cos(\beta + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\text{car } \sin \alpha = -\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Donc } \varphi = \varphi_x - \varphi_y = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

↳ Décalage de $-\frac{\pi}{2}$

$$E_{0x} = E_{0y} = E_0 \rightarrow \text{polarisation circulaire à droite}$$