

Outils mathématiques

Vecteurs

Exercice 1

1- Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(2 ; -3 ; 5)$ et $(3 ; 1 ; -2)$ dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

a- Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$

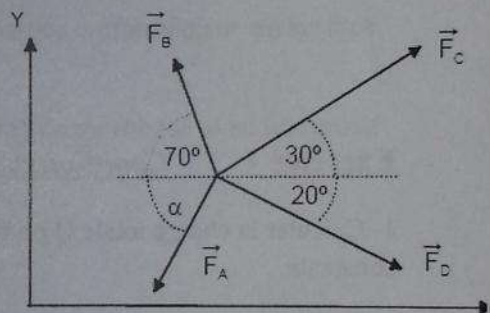
b- Calculer les coordonnées du vecteur $5\vec{AB}$

c- Calculer la norme du vecteur $\vec{AB}$ (où la distance entre les points A et B)

2- Quatre vecteurs sont représentés sur la figure ci contre, dans le repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

a- Donner les composantes du vecteur $\vec{F}_B$, $\vec{F}_C$ et $\vec{F}_D$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

b- Sachant que la résultante totale des vecteurs est nulle, déterminer l'intensité de F_A et l'angle α . On donne : $F_B = 800$, $F_C = 1000$ et $F_D = 800$,



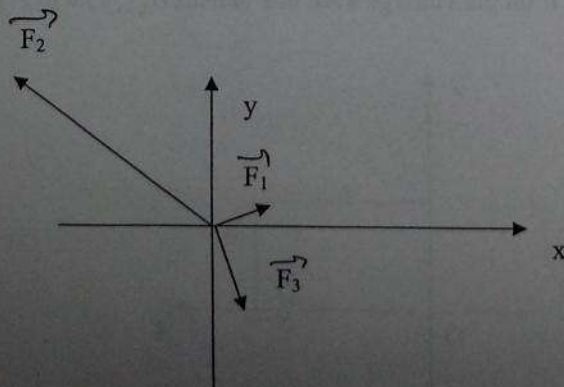
Exercice 2

Calculer la résultante des forces dans les cas suivants :

a) $F_1 = 3\text{ N}$, $F_2 = 2\text{ N}$ et $\alpha = (\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 90^\circ$

b) $F_1 = 3\text{ N}$, $F_2 = 2\text{ N}$ et $\alpha = (\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 30^\circ$

c) Trois forces concourantes tel que: $\alpha = (\vec{F}_1, O\vec{x}) = 30^\circ$, $\beta = (\vec{F}_2, O\vec{y}) = 45^\circ$, $\gamma = (\vec{F}_3, O\vec{x}) = 60^\circ$
 $F_1 = 1\text{ N}$, $F_2 = 5\text{ N}$, $F_3 = 2\text{ N}$. (Penser à projeter les vecteurs dans un repère (Ox, Oy)).



Exercice 3

On considère, dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ direct, les trois vecteurs : $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$.

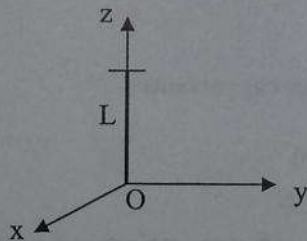
de composantes respectives: $\vec{U} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{V} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{W} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. a- Calculer le produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{V}$
b- En déduire le cosinus de l'angle entre les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont orthogonaux
3. Calculer les composantes de : $\vec{Z} = \vec{V} \wedge \vec{W}$.

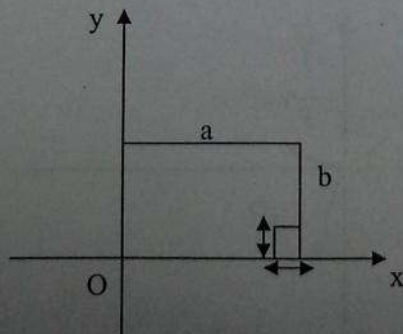
Intégrales

Exercice 4 Coordonnées cartésiennes.

1- Calculer la charge totale Q portée par une barre de longueur L , tel que $\lambda(z) = \alpha z^2$ où α est une constante.



2- Calculer la charge totale d'un plan chargé avec une densité $\sigma(x, y) = C.x^2 y^2$, C est une constante.



Exercice 5 Coordonnées cylindriques

Calculer la charge totale

- D'un disque de rayon R , tel que la densité surfacique est : $\sigma(r) = ar^2$ (a est une constante).
- D'un cylindre creux, de rayon R , de hauteur h , uniformément chargé en surface latérale, avec une densité σ_0 .
- D'un cylindre de rayon R , de hauteur h , chargé en volume avec une densité variable:

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$$

Où ρ_0 est une constante.

Exercice 6 Coordonnées sphériques

1- Calculer la (charge totale) portée par une sphère de rayon R , chargée uniformément en surface avec une densité σ_0 .

2- Calculer la charge totale portée par une sphère de rayon R , chargée en volume avec une densité variable :

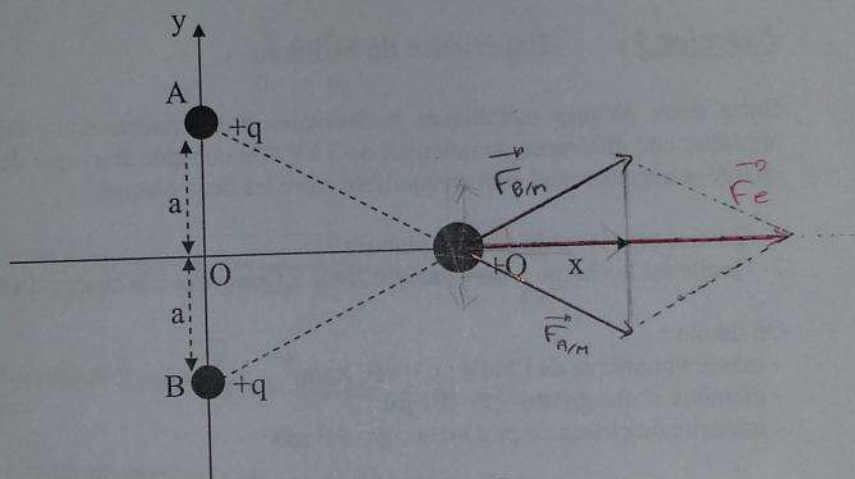
$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Où ρ_0 est une constante.

Série 2
Electrostatique

Exercice 1

On considère deux charges ponctuelles identiques de charge $q = 2\mu\text{C}$ placées respectivement aux points A et B, suivant l'axe Oy à une distance $a = 3\text{ cm}$ du centre O.
Une charge $+Q = 4\mu\text{C}$ est placée en M sur l'axe Ox à l'abscisse $OM = x$.

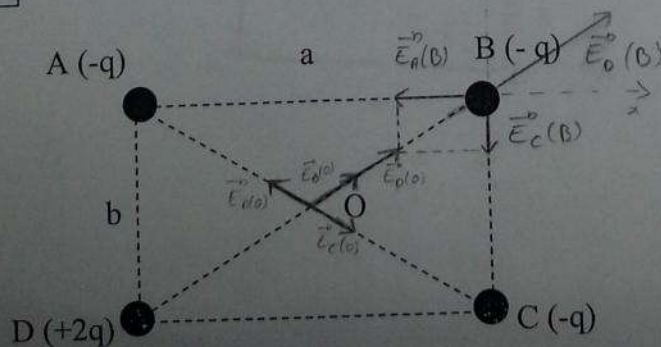


- 1- Représenter la résultante $\vec{F}_e$ des forces électrostatiques agissant sur Q.
- 2- Déterminer (en fonction de x) l'intensité de la résultante : F_e .

Exercice 2

On place quatre charges ponctuelles (avec $q > 0$) respectivement aux points A ; B ; C et D qui représentent les sommets d'un rectangle de longueur a, de largeur b et de centre O, tel que :

$$b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$



$$E_A(B) = \frac{k|q_A|}{a^2}$$

- 1) Représenter les champs électrostatiques $\vec{E}_A(B)$, $\vec{E}_D(B)$ et $\vec{E}_C(B)$, créés en B par les trois charges q_A , q_D et q_C . (Respecter l'intensité relative à chaque champ)
- 2) Trouver la norme du champ électrostatique résultant $\vec{E}(B)$ créé en B.
Représenter $\vec{E}(B)$.
- 3) Trouver la norme du champ électrostatique résultant $\vec{E}(O)$ créée en O par les quatre charges. Représenter $\vec{E}(O)$.
- 4) Calculer le potentiel électrostatique $V(O)$, créée en O par les quatre charges.

Exercice 3 : Expérience de Millikan

Entre deux plaques métalliques horizontales d'un condensateur, distantes de 1,5 cm, on applique une différence de potentiel de 3 kV. On constate alors que de petites gouttes d'huile chargées négativement sont en équilibre entre les deux plaques.

- 1- Quelles sont les polarités des plaques ?
- 2- Quelle est la charge d'une goutte d'huile ? Comparer à la charge d'un électron.

On donne :

- masse volumique de l'huile : $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$
- diamètre d'une goutte : $D = 4,1 \text{ }\mu\text{m}$
- intensité du champ de pesanteur : $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Champ Electromagnétique

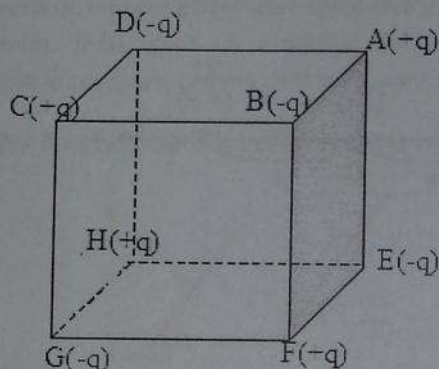
Série n° 3

Exercice 1

Des charges ponctuelles sont placées respectivement sur les sommets A, B, C, D, E, F, G et H d'un cube de côté a . (Voir figure ci-dessous).

Exprimer en fonction de q et de a ,

- 1- Le potentiel électrostatique créé en A par les charges placées en B, D et E
- 2- a. Le potentiel électrostatique créé en A par l'ensemble des charges
b. En déduire l'énergie électrostatique de la charge placée en A.



Exercice 2

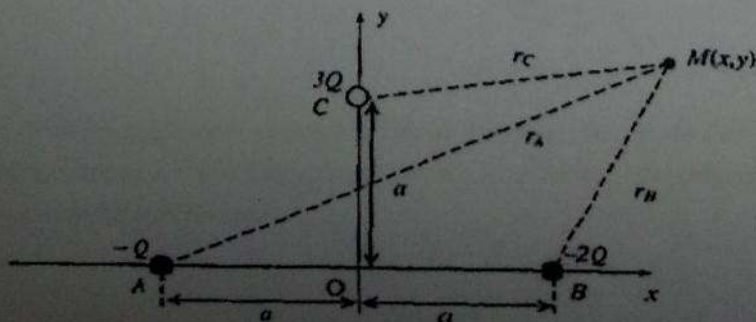
Une distribution de charges à symétrie sphérique autour d'un point O, crée en un point M quelconque de l'espace, situé à une distance r de O, un potentiel de la forme :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right), \text{ Où } a_0, q \text{ et } \epsilon_0 \text{ sont des constantes positives.}$$

- 1- Préciser la direction du vecteur champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution sphérique au point M (sans faire de calcul).
- 2- En déduire l'expression du champ électrique : $\vec{E}(M)$

Exercice 3

On considère trois charges ponctuelles disposées comme le montre la figure ci-dessous.

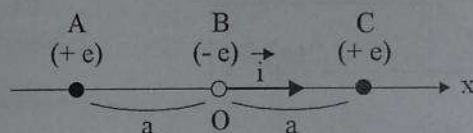


- 1- Déterminer le potentiel électrostatique créé en un point $M(x,y)$ situé dans le plan des charges.
- 2- En déduire le champ électrostatique créé par les trois charges au point $M(x,y)$.

Exercice 4

Trois charges électriques ponctuelles de valeurs respectives, $+e$, $-e$ et $+e$, alignées sur l'axe Ox sont espacées d'une distance a .

- 1- Exprimer la force électrique exercée sur chacune ^{des} charges, ainsi que les potentiels $V(A)$, $V(B)$ et $V(C)$.
- 2- En déduire l'énergie potentielle électrique de ce système de charges.



Série 4

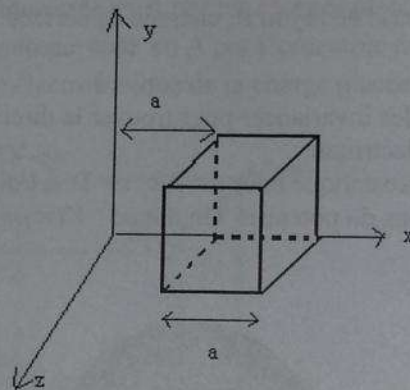
Théorème de Gauss

Exercice 1

Les composantes du champ électrique dans la figure ci-dessous sont :

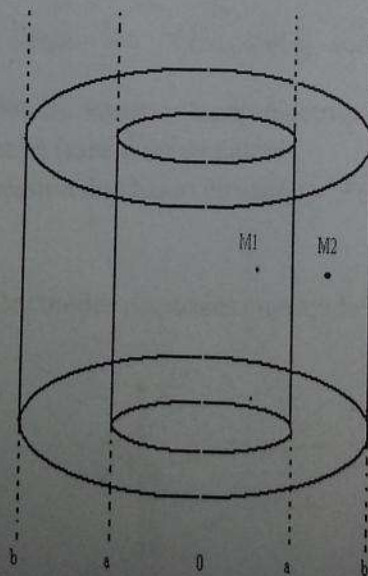
$$E_x = b\sqrt{x}, E_y = 0, E_z = 0$$

- 1- Calculer la valeur du flux à travers le cube ($b = 800 \text{ V.m}^{-3/2}$).
- 2- En déduire la valeur de la charge à l'intérieur du cube, on donne $a = 10\text{cm}$, $\epsilon_0 \approx 9.10^{-12} \text{ SI}$



Exercice 2

Deux cylindriques métalliques creux et coaxiaux, de rayon a et b , portent respectivement une charge $+Q$ et $-Q$. Les cylindres ont chacun une longueur infiniment grande l .

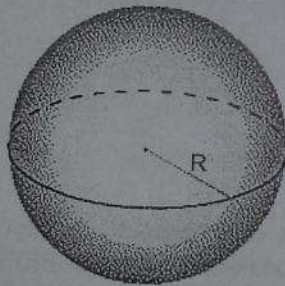


- 1) Utiliser les symétries et les invariances pour trouver la direction et les variables de dépendance du champ électrique.
- 2) Exprimer à l'aide du théorème de Gauss, le champ électrostatique créé dans les régions : $r < a$; $a < r < b$ et $r > b$
- 3) En déduire les expressions du potentiel électrique dans les mêmes régions citées ci-dessus.
- 4) Retrouver l'expression de la capacité de ce système sachant que : $C = \frac{Q}{V_a - V_b}$

Exercice 3

On considère une sphère creuse de rayon R , chargée en surface avec une densité σ constante et positive.

- 1) Utiliser les symétries et les invariances pour trouver la direction et les variables de dépendance du champ électrique.
- 2) Exprimer le champ électrostatique pour $r < R$ et $r > R$, à l'aide du théorème de Gauss.
- 3) En déduire les expressions du potentiel. On donne : $V(\infty) = 0$

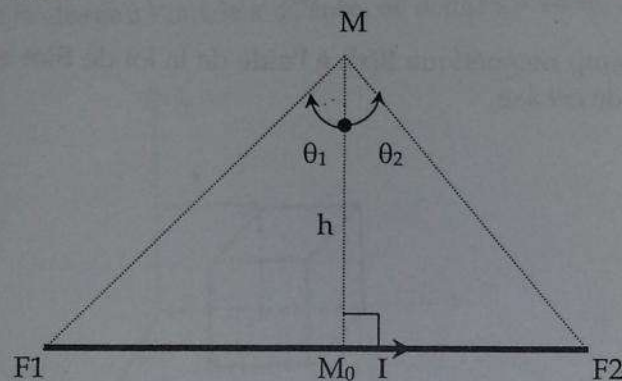


Champ électromagnétique L₂

Série n°5 Magnétostatique

Exercice 1

Un segment de fil rectiligne F₁F₂ est parcouru par un courant d'intensité constante I. Un point M est à la distance M₀ du fil.

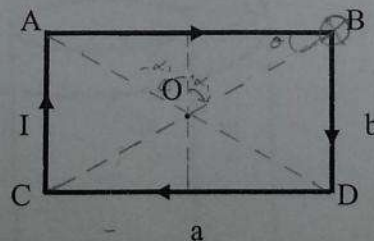


1/ Exprimer le champ magnétostatique B produit par le courant I en M, en fonction de h, I et des angles θ_1 et θ_2 .

2/ En déduire l'expression du champ magnétique créé par un fil infini.

Exercice 2

Appliquer la formule démontrée ci-dessus pour exprimer le champ magnétique résultant, créé au centre O, d'un rectangle de longueur a et de largeur b, traversé par un courant I.

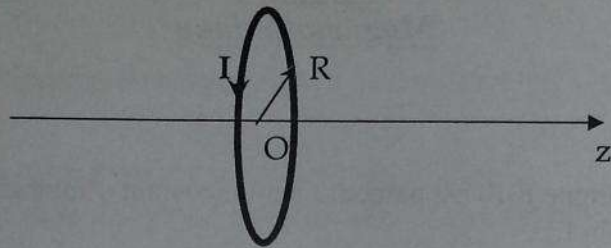


On donne:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 3

Une spire circulaire de rayon R et de centre O est parcouru par un courant constant I . Soit Oz l'axe perpendiculaire au plan de la spire.



Exprimer le champ magnétique $B(x)$, à l'aide de la loi de Biot et Savart, en tout point M d'abscisse x de cet axe.