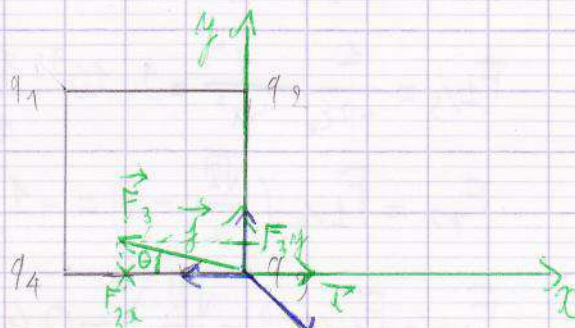


TD 1

Champs Electrostatique

Exercice 1



$$F_{1/3} = \left| \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{a^2} \right| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{a^2}$$

Selon le principe de superposition.

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3} + \vec{F}_{4/3}$$

$$\vec{F}_{1/3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{(a_1 a_3)^2} \cdot \vec{u}_1$$

$$\vec{F}_{2/3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{(a_2 a_3)^2} \cdot \vec{u}_2$$

$$\vec{F}_{4/3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4 q_3}{(a_4 a_3)^2} \cdot \vec{u}_4$$

Soit un repère $(0, \vec{r}, \vec{f})$, écrivons les 3 forces de cette base

$$\vec{F}_{1/3} = F_{1/3} \cdot \cos \alpha \vec{r} - F_{1/3} \cdot \sin \alpha \vec{f}$$

$$\text{avec } F_{1/3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_3|}{(A_1 A_3)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{a^2} \quad \text{car } a_1 a_3 = a\sqrt{2}$$

$$F_{1/3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \quad \alpha = 45^\circ$$

$$F_{2/3} = F_{2/3} \vec{f} \Rightarrow F_{2/3} = 2F_{1/3}$$

$$F_{4/3} = 4F_{1/3}$$

$$\vec{F}_3 = (F_{1/3} \cos \alpha - F_{4/3}) \vec{i} + (F_{2/3} - F_{1/3} \sin \alpha) \vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = F_{1/3} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \right) \vec{i} + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vec{j} \right]$$

$$F_{1/3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q^2}{a^2} = 0,36 \cdot 10^{-1}$$

$$F_{3x} = F_{1/3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \right) = -1,2 \cdot 10^{-1} \text{ N}$$

$$F_{3y} = F_{1/3} \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0,46 \cdot 10^{-1} \text{ N}$$

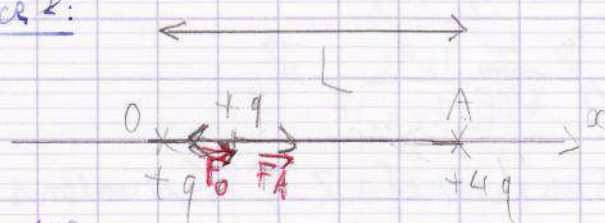
$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2} = 1,3 \times 10^{-1} \text{ N}$$

La direction de F_3 est définie par: $\tan \theta = \frac{F_{3y}}{F_{3x}}$

$$\tan \theta = \frac{0,46}{-1,2}$$

$$\theta = 21^\circ$$

Exercice 2:



A l'équilibre:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \vec{F}_A = -\vec{F}_0$$

La charge est soumise à $\vec{F}_0$ et à $\vec{F}_A$

q'est à l'équilibre si $\vec{F}_0 + \vec{F}_A = \vec{0}$ (1)

$$\vec{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{x^2} \vec{i}$$

$$\vec{F}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot 4q}{(L-x)^2} (-\vec{i})$$

$$\frac{q^2}{x^2} = \frac{-q \cdot 4q}{(L-x)^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{-4}{(L-x)^2}$$

$$x^2 = \left(L^2 - 2Lx + x^2 \right) \times \left(-\frac{1}{4} \right)$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{x^2} \vec{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4qq'}{(L-x)^2} (-\vec{x})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(L-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - (L-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x)^2 - (L-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+L-x)(2x-L+x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+L)(3x-L) = 0$$

~~$x = -L$~~
à rejeter

$$\text{ou } 3x - L = 0$$

$$x = \frac{L}{3}$$

La position d'équilibre

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_A = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{x^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4qq'}{(L-x)^2} \right) \vec{x}$$

$$= \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(L-x)^2} \right) \vec{x}$$

$$u(x)^n \rightarrow n \cdot u'(x) \cdot u^{n-1}(x)$$

$$F'(x) = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{x^3} - 4 \cdot (-2) \cdot (L-x)^{-3} \right)$$

$$= \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{x^3} + 8x(-1) \cdot (L-x)^{-3} \right)$$

$$= \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \left(-2 \left(\frac{L}{3} \right)^{-3} - 8 \left(\frac{2L}{3} \right)^{-3} \right)$$

brouillon

principe de superposition

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3} + \vec{F}_{4/3}$$

$$\vec{F}_{1/3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{(a_1 a_3)^2} \vec{u}_1$$

$$\vec{F}_{2/3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{(a_2 a_3)^2} \vec{u}_2$$

$$\vec{F}_{4/3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4 q_3}{(a_4 a_3)^2} \vec{u}_4$$



Soit un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ écrivons les 3 forces de cette base:

$$\vec{F}_{1/3} = \cos \alpha \vec{F}_{1/3} - \sin \alpha \vec{F}_{1/3}$$

$$\vec{F}_{2/3} = \sin \alpha \vec{j}$$

$$\vec{F}_{4/3} = -F_{4/3} \cdot \cos \alpha \vec{i}$$

$$\text{avec } F_{1/3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_3|}{(A_1 A_3)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4q^2}{2a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{(1.0 \cdot 10^{-9})^2}{(0.05)^2}$$

$$\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$|\vec{F}_{1/3}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{4}$$

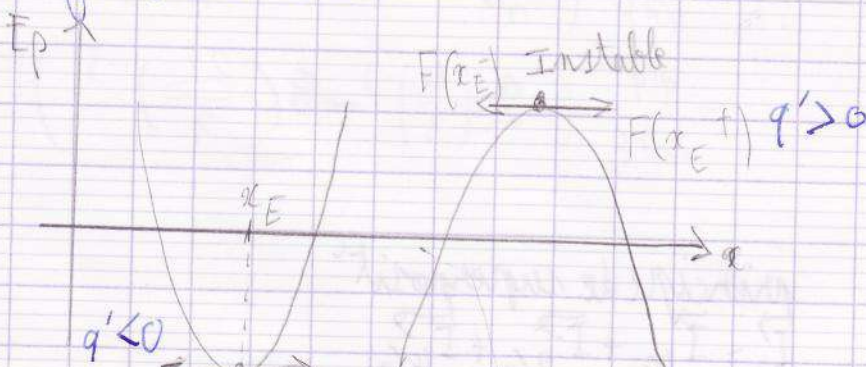
$$F_{4/3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_4 q_3|}{a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q^2}{a^2} = 4 F_{1/3}$$

$$F_{2/3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2 q_3|}{a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{a^2} = 2 F_{1/3}$$

fin du brouillon

nouvelle séance

fin de l'exo 2:



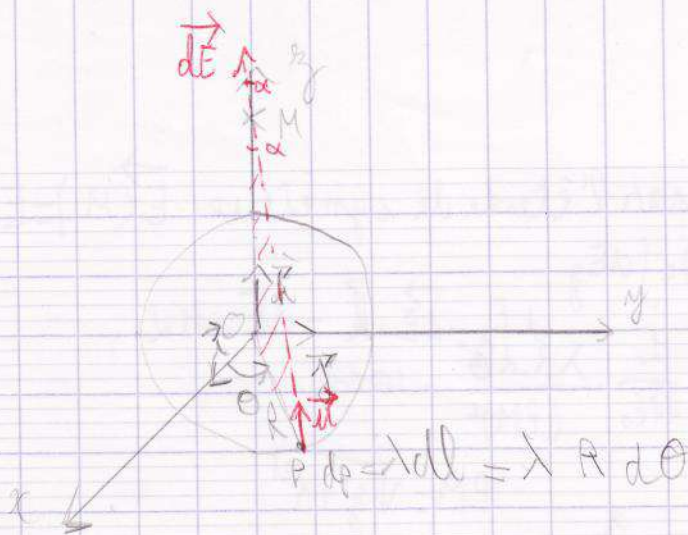
$q' < 0$
 $F(x_E^+)$ $F(x_E^-)$
 Equilibre stable

+finir la fin du calcul

$\vec{F}(x_E^+) M \vec{F}(x_E^-)$
 $\vec{F}(4+q) q, \vec{F}(+q) +4q$
 Equilibre stable quand $q' > 0$

instable

Même schéma en échangeant $F(x_E^+)$ et $F(x_E^-)$



Soit un cerceau ayant une distribution de charge linéaire λ . Déterminer le vecteur champ en un point M dont les coordonnées sont $(0, 0, z)$

1^{ère} étape: symétrie

2) On applique le principe de superposition

$$\vec{E}(M) = E_z \cdot \vec{k}$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{(PM)^2} \cdot \vec{u}$$

$$E_z = \int dE_z = \int d\vec{E} \cdot \vec{k}$$

Solution:

1) étude des symétries et invariances

L'axe de révolution Oz qui est l'axe du disque permet de dire qu'une rotation autour de cet axe concerne le champ en chacun de ses points donc:

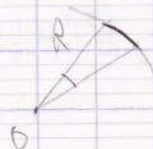
$$\vec{E}(M) = E_z \cdot \vec{k}$$

Soit $P(R, \theta)$. soit 1 élément de charge dq correspond à ce point P tel que $dq = \lambda dl = \lambda \cdot R \cdot d\theta$

dq va créer au point M un vecteur champ élémentaire

$d\vec{E}(M)$ tel que:

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(PM)^2} \cdot \vec{u}$$



Or, par l'étude de symétrie: $\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{k}$

$$E_z(z) = \int dE_z$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R \cdot d\theta}{(PM)^2} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \quad PM = \sqrt{z^2 + R^2}$$

$$E_z(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z \lambda R \cdot d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda z R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$E_z(z) = \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda z R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi$$

$$E_z(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad \vec{E}(M) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \vec{k}$$

Exercice 6:

1^{re} étape: étude des symétries et invariances

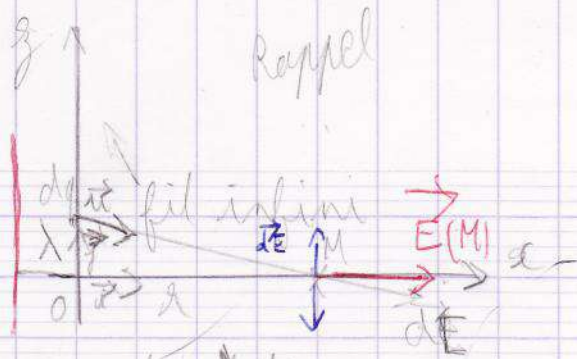
Recherche de l'orientation et des symétries

Le plan (xOz) est un plan de symétrie de charge donc le champ électrostatique est dans ce plan.

Le plan (yOz) est un plan de symétrie de charge donc $\vec{E}$ est aussi dans ce plan.

Le vecteur champ $\vec{E}$ est donc porté par l'intersection de ces 2 plans c-à-d l'axe Oz

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_z \cdot \vec{k}$$



$$dq = \lambda dz$$

Le plan de symétrie contient l'axe des x , $\vec{E}(M) = E_x \vec{i}$
 dq va créer un champ élémentaire en un point M
 avec un champ élémentaire:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{dq}{OM^2} \vec{u}$$

$$\vec{E}(M) = E_x \vec{i}$$

$$E_x = \int dE_x$$

$$dE_x = d\vec{E} \cdot \vec{i} = dE \times \cos \theta$$

$$E_x = \int dE \cos \theta$$

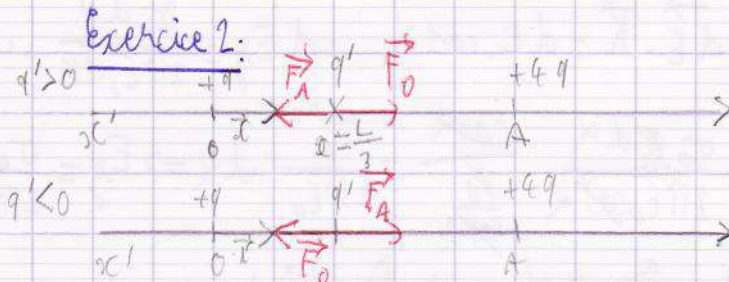
$$E_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{dq}{(r^2)^2} \cos \theta$$

résultat: $E = \frac{\sigma_0}{\pi\epsilon_0} \arctan\left(\frac{a}{z}\right) \vec{i}$

nouvelle
séance

fin du TD 2 (juste l'exo 2)

Exercice 2:



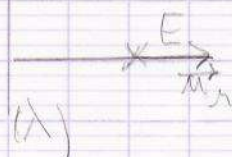
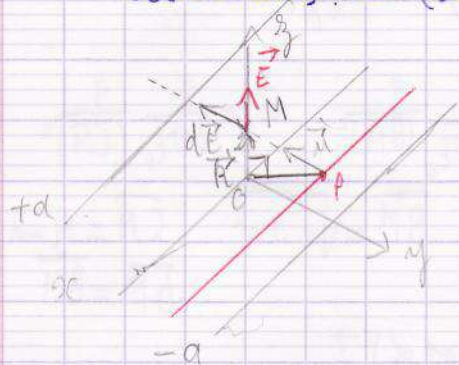
$$\vec{F}(x) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(L-x)^2} \right) \cdot \vec{x} \rightarrow \frac{dF}{dx} \cdot \vec{x} = \frac{-qq'}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2}{x^3} + \frac{8}{(L-x)^3} \right] \vec{x}$$

$$\rightarrow \frac{dF}{dx} \Big|_{x=\frac{L}{3}} = -\frac{d^2F}{dx^2} \rightarrow \frac{d^2F}{dx^2} \Big|_{x=\frac{L}{3}} > 0 \quad \text{Equilibre stable}$$

$$\rightarrow \frac{dF}{dx} \cdot \vec{x} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2}{x^3} + \frac{8}{(L-x)^3} \right] \cdot \vec{x} \rightarrow \frac{dF}{dx} \dots ?$$

Ex 6 TD 1:

voir cours: $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$



Subdiviser le tuban en une succession de fils infinis.
Le fil infini crée le champ élémentaire $d\vec{E}$ en un point M, donné par:

$$d\vec{E}_{\text{fils}} = \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 \text{P.M.}} \cdot \vec{u} = \frac{\sigma_0 dy}{2\pi\epsilon_0 \text{P.M.}} \cdot \vec{u}$$

par symétrie: $\vec{E}(z) = E_z \cdot \vec{u}_z$

$$\begin{aligned} dq &= d\lambda \cdot dx \\ dq &= \sigma_0 dS = \sigma_0 dxdy \\ \Rightarrow d\lambda &= \sigma_0 dy \end{aligned}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{z} \Rightarrow y = z \tan \alpha$$

$$dy = z \frac{dz}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{z}{PM} \Rightarrow PM = \frac{z}{\cos \alpha}$$

$$E_z = \int dE_z$$

$$dE_z = d\vec{E} \cdot \vec{h} = dE \cdot \cos \alpha \quad dE_z = \frac{\sigma_0 dy}{2\pi \epsilon_0 \cdot PM} \cdot \cos \alpha$$

$$dE_z = \frac{\sigma_0 dy}{2\pi \epsilon_0 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{z} = \frac{\sigma_0}{2\pi \epsilon_0} \frac{dy}{z \cos \alpha} \Rightarrow E_z = \frac{\sigma_0}{2\pi \epsilon_0} \int d\alpha = \frac{\sigma_0}{2\pi \epsilon_0} \cdot 2\alpha_0$$

$$\tan \alpha_0 = \frac{a}{z} \Rightarrow \alpha_0 = \arctan\left(\frac{a}{z}\right)$$

$$E_z = \frac{\sigma_0}{\pi \epsilon_0} \arctan\left(\frac{a}{z}\right) \quad \vec{E}(M) = \frac{\sigma_0}{\pi \epsilon_0} \cdot \text{Arctan}\left(\frac{a}{z}\right) \cdot \vec{h}$$

TD 2:

exercice 1

1) Le vecteur champ résultant:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) + \vec{E}_C(M) + \vec{E}_D(M)$$

$$\vec{E}_A(M) = E_A \vec{x}$$

$$\vec{E}_B(M) = E_B \cos \alpha \cdot \vec{x} - E_B \sin \alpha \cdot \vec{y}$$

$$\vec{E}_C(M) = E_C \cdot \vec{x}$$

$$\vec{E}_D(M) = E_D \cos \alpha \cdot \vec{x} + E_D \sin \alpha \cdot \vec{y}$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{(AM)^2} \quad E_B = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{(BM)^2} \quad E_C = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{(CM)^2} \quad E_D = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{(DM)^2}$$

$$AM = |AM| = r + a$$

$$BM = \sqrt{a^2 + r^2}$$

$$CM = r - a$$

$$DM = BM$$

$$\vec{E}(M) = (E_A + E_C + 2E_B \cos \alpha) \vec{x}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{(r+a)^2} + \frac{1}{(r-a)^2} + \frac{2r}{(r^2+a^2)^{3/2}} \right] \cdot \vec{x}$$

$$2) \vec{E} = -\text{grad } V$$

$$E(r) = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E \cdot dr$$

$$V(r) = - \int E(r) \cdot dr + \text{cte} = 0$$

$$V(r) = - \int E(r) \cdot dr \quad V(r) = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{r+a} + \frac{1}{r-a} + \frac{2r}{(r^2+a^2)^{3/2}} \right] dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{-dr}{(r+a)^2} + \int \frac{-dr}{(r-a)^2} + \int \frac{-2r dr}{(r^2+a^2)^{3/2}} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r+a} + \frac{1}{r-a} + \frac{2}{(r^2+a^2)^{1/2}} \right]$$

$$u(x)^{n'} \rightarrow n u'(x) \cdot u^{n-1}(x)$$

$$r \gg a \Rightarrow \frac{a}{r} = \epsilon \rightarrow 0$$

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \epsilon^2 + \dots \quad 0^+(\epsilon)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^2} + \frac{1}{r^2 \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^2} + \frac{2r}{r^3 \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{3/2}} \right] \vec{r}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^2} + \frac{2}{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{3/2}} \right] \vec{r}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-2} + \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{-2} + 2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-3/2} \right] \vec{r}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 - \frac{2a^2}{r^2} + 1 + \frac{2a^2}{r^2} + 2 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a^2}{r^2}\right) \right] \vec{r}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[4 - 3 \frac{a^2}{r^2} \right] \vec{r}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{r} \quad \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{r}$$

$$\text{tel que } Q = 4q$$

Or d'après la loi de Coulomb, le champ électrique créé par une charge ponctuelle unique est:

Donc, si l'on identifie les 2 expressions de E , on peut dire que $Q = 4q$

$$\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$$

$$= x\vec{u} + a\vec{u}$$

$$= (a+x)\vec{u}$$

$$|\vec{AM}| = |a+x|$$

$$|\vec{BM}| = |x-a|$$

$$-a \leq x \leq a$$



$$1) V(x) = V_A(M) + V_B(M)$$

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{AM} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{BM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

$$2) E_p(x) = q'V(x)$$

$$E_p(x) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

$$E_p(x) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{a^2 - x^2}$$

$$3) \text{ En } x=0; E_p(x) \text{ présente un extremum traduit par } \frac{dE_p}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

$$E_p(x) = \frac{qq'2a}{4\pi\epsilon_0(a^2 - x^2)} \rightarrow \frac{dE_p}{dx} = \frac{qq'4ax}{4\pi\epsilon_0(a^2 - x^2)^2}$$

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \text{ pour } x=0 \quad \text{La position d'équilibre } x=0 \text{ est confirmée par ce calcul}$$

Nature (stable ou instable?)

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = \frac{4aqq'}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{a^2 + 3x^2}{(a^2 - x^2)^3} \right]$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} \Big|_{x=0} = \frac{4aqq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2}{a^6} = \frac{4qq'}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

$$\text{Si } q' > 0 \Rightarrow \frac{d^2E_p}{dx^2} \Big|_{x=0} > 0 \quad \text{Stable}$$

$$q' < 0 \Rightarrow \frac{d^2E_p}{dx^2} \Big|_{x=0} < 0 \quad \text{instable}$$

$$4) \vec{F} = -q \vec{\text{grad}} E_p \quad \vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \cdot \vec{u} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{4ax}{(a^2 - x^2)^2} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

nouvelle
séance

suite du TD 3

th. de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$



1^{ere} étape:

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_\theta + E_z(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_z$$

Invariances:

→ par rotation ⇒

→ par translation ⇒
symétrie

↳ La distribution est invariante par rotation ⇒ E ne dépend pas de θ

↳ "

"

"

"

"

"

"

"

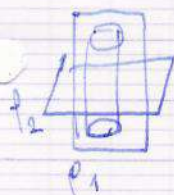
"

"

"

parallèlement à $z z'$

⇒ E ne dépend pas de z



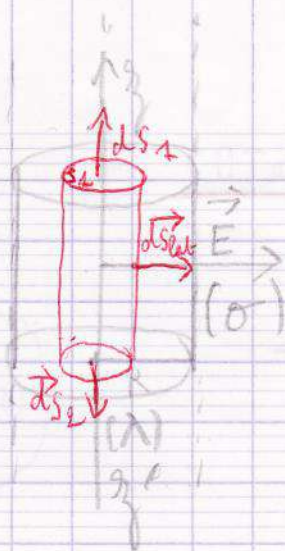
Symétries:

(P₁) plan // à $z z'$ et contenant M → plan de symétrie.

(P₂) plan ⊥ à $z z'$ et contenant M → " " "

D'où $\vec{E}$ sera portée par l'intersection des 2 plans

$$\Rightarrow \vec{E}(r, \theta, z) = E(r) \cdot \vec{u}_r$$



2^e étape: choix de la surface:
surface cylindrique de
hauteur arbitraire h et
de rayon $r = OM$

2 cas sont à considérer

$$r < R$$

$$r > R$$

$$\Phi_t = \Phi_{B_1} + \Phi_{B_2} + \Phi_{lat}$$

$$\Phi_{B_1} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = 0 \text{ car } \vec{E} \perp d\vec{S}_1$$

$$\Phi_{B_2} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \text{ car } \vec{E} \perp d\vec{S}_2$$

$$\begin{aligned} \Phi_{lat} &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat} = \oint E(r) \cdot \vec{u}_r \cdot dS_{lat} \cdot \vec{n} \\ &= \oint E(r) \cdot dS_{lat} \text{ car } \vec{n} = \vec{u}_r \end{aligned}$$

$$\Phi_{lat} = E(r) \cdot 2\pi r \cdot h$$

La charge intérieure contenue dans la surface de Gauss est:

$$Q_{int} = \int \lambda dz = \lambda h$$

th de Gauss:

$$E(r) \cdot 2\pi r K = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

$$r > R$$

$$Q_{int} = \lambda h + 2\pi R h$$

$$Q_{int} = Q_{int(cyl)} + Q_{int(cylindrique)}$$

$$dq = \lambda \cdot dz \Rightarrow Q_{\text{int}}(\text{fil}) = \lambda \int_0^h dz = \lambda h$$

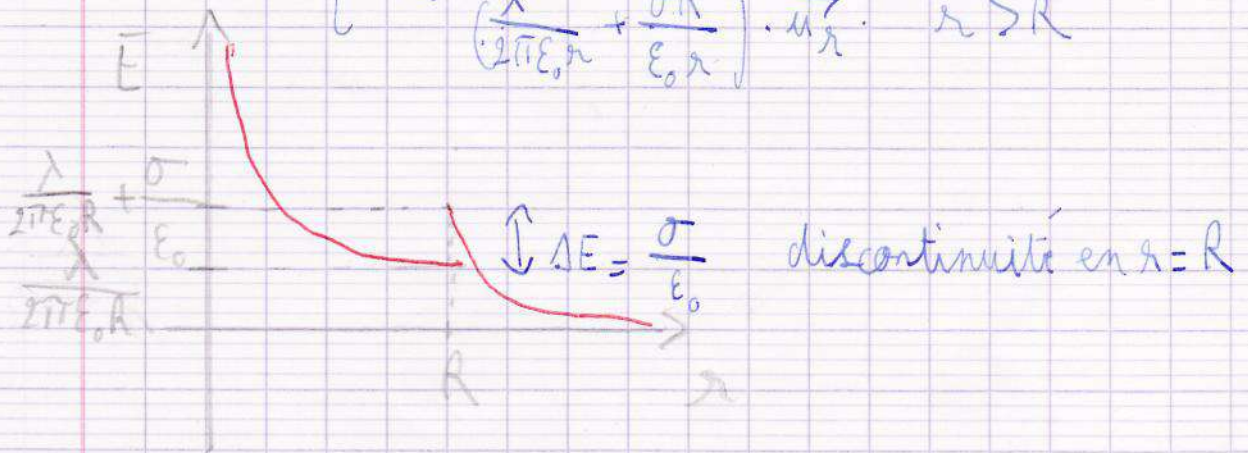
$$dq = \sigma \cdot dS \Rightarrow Q_{\text{int}}(\text{cylindre}) = \sigma \int_0^R dS = \sigma S = \sigma 2\pi R h$$

$$Q_{\text{int}} = \lambda h + \sigma 2\pi R h$$

$$= h(\lambda + \sigma 2\pi R)$$

$$\text{d'où } E(r) 2\pi r h = \frac{h(\lambda + \sigma 2\pi R)}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} + \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \cdot \vec{u}_r & r < R \\ \left(\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} + \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \right) \cdot \vec{u}_r & r > R \end{cases}$$



TD
Déflexion magnétique



$$\begin{cases} x_p = \sin \alpha R \\ y_p = R - R \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha) \end{cases}$$

Or $L \ll R \Rightarrow \frac{L}{R} \rightarrow 0$

$$\begin{cases} \Rightarrow \sin \alpha \approx \alpha \\ \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \\ \tan \alpha \approx \alpha \\ L \ll R \end{cases}$$

$$\text{car } R = \frac{mv_0}{eB} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_p = \alpha R \\ y_p = R(1 - 1 + \frac{\alpha^2}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \alpha R = L \Rightarrow \alpha = \frac{L}{R} = \frac{LeB}{mv_0} \\ y_p = R \frac{\alpha^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{LeB}{mv_0} \\ y_p = \frac{1}{2} \frac{L^2 eB}{mv_0} \end{cases}$$

Appliquons le th. de l'Ec:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = eV$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

Energie cinétique Energie potentielle électrostatique

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = eV$$

$$v_0 = \left(\frac{2eV}{m} \right)^{1/2} = \frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 3 \times 10^3}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 5,92 \times 10^7 \text{ m/s}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\alpha = \frac{LeB}{mv_0} = \frac{10^{-2} \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 3 \times 10^3}{9,1 \cdot 10^{-31} \times 5,92 \times 10^7} = 8,9 \cdot 10^{-2} \text{ radian}$$

$$y_p = \frac{1}{2} \frac{L^2 eB}{mv_0} = \frac{1}{2} \frac{10^{-4} \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 3 \times 10^3}{9,1 \cdot 10^{-31} \times 5,92 \times 10^7} = 4,47 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$y_{\pm} = y_p + (D - \frac{L}{2}) \cdot \tan \alpha$$

$$y_I = D \frac{L}{b} = D \alpha = D \cdot \frac{LeB}{m v_0}$$

$$y_I = 18 \text{ cm}$$

$$\tan \alpha = \frac{x}{D-L} \quad x = (\tan \alpha) (D-L)$$

$$x = \alpha (D-L)$$

$$x = 8,9 \cdot 10^{-2} \cdot 0,195 = 0,0174$$

$$x = 8,9 \cdot 10^{-2} \cdot (0,195) = 0,01735 \text{ m}$$

$$y_{\pm} = y_p + x = 1,7 \times 10^{-4} + 1,735 \times 10^{-4} = 0,01744 \text{ m}$$

Si Q est grand change

$$\tan \alpha = \frac{y_{\pm}}{D}$$

$$\alpha = \frac{y_{\pm}}{D}$$

$$\frac{y_{\pm}}{\alpha} = D$$

$$D = \frac{0,017447}{8,9 \cdot 10^{-2}} = 0,196 \text{ m}$$

$$x_Q = \frac{L}{2} = 0,05 \text{ m}$$

$$\tan \alpha' = \frac{y_I}{b} \quad \alpha' = \frac{82}{b} \quad \alpha' = 2$$

2^e méthode: $OQ' = \frac{L}{2}$ $\alpha = \alpha'$

$$\tan \alpha' = \frac{y_I}{L/2}$$

$$\alpha' = \frac{y_I}{0,5} = \frac{1}{4} \frac{LeB}{m v_0} = \frac{LeB}{m v_0}$$

$$\tan \alpha = \frac{y_p}{L - OQ'} \Rightarrow \tan \alpha (L - OQ') = y_p$$

$$L \tan \alpha - OQ' \tan \alpha = y_p$$

$$L \tan \alpha - y_p = OQ' \tan \alpha$$

$$OQ' = L - \frac{y_p}{\tan \alpha} = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$$

Q' est l'équivalent de Q

nouvelle
séance

TD 4 (début)

Ex:

Étape 1: Étudier les invariances et les symétries de la distribution de courant.

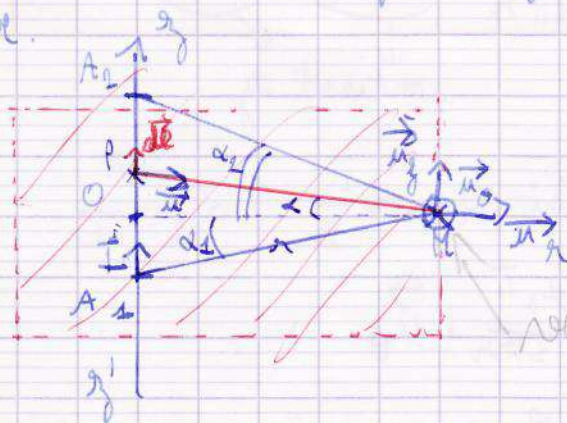
Dans le repère cylindrique

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B_r(r, \theta, z) \cdot \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \cdot \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \cdot \vec{e}_z$$

→ La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) ⇒ le champ ne dépend pas de θ .

$$\forall \theta, \vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r, z)$$

→ En revanche, la distribution n'est pas invariante par translation le long de (Oz) , car le fil a une longueur finie.



Rappel:

Le champ magnétique créé en un point M d'un plan de symétrie d'une distribution de courant est $\perp$ à ce plan.

$$\text{D'où } \vec{B}(r, \theta, z) = B_\theta(r, z) \cdot \vec{e}_\theta$$

Étape 2: Découper le fil A_1A_2 en éléments de longueurs infinitésimales (très petits) dl , parcourus par un courant I .
Selon Biot et Savart, chacun des éléments (Idl) va créer au point M un champ élémentaire

$$d\vec{B}_p(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{(PM)^2}$$

$$d\vec{l} \wedge \vec{u} = dl \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \cdot \vec{u}_\theta = dl \cos \alpha \vec{u}_\theta$$

$$z = r \tan \alpha \Rightarrow dz = dl = r \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$d\vec{B}_p(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \cos \alpha \vec{u}_\theta}{(\frac{r}{\cos \alpha})^2} \text{ on simplifie:}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\alpha \cos \alpha \vec{u}_\theta}{r}$$

$$\vec{B}(M) = \int d\vec{B}_p(M) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos \alpha d\alpha \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} [\sin \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{u}_\theta$$

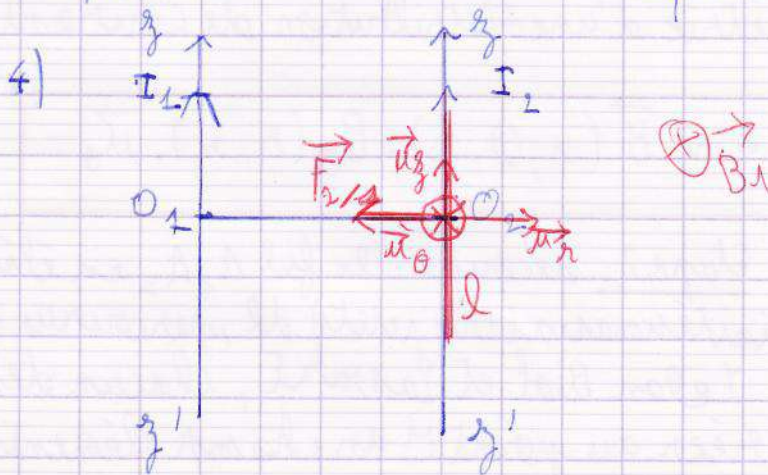
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} [\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1] \vec{u}_\theta$$

contient z

3) fil infini: $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \vec{u}_\theta$$

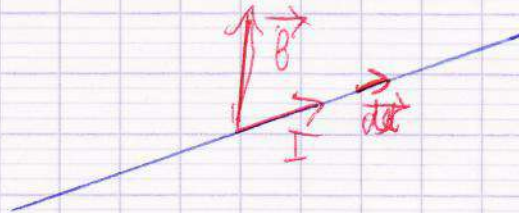
Remarque: Le vecteur champ magnétique est tangent aux lignes de champ, il est porté par $\vec{u}_\theta$ donc les lignes de champ sont des cercles concentriques d'axes Oz.



Le champ magnétique créé par le fil (1):

$$\vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

appel:



courant I
 $\vec{B}$ champ magnétique

Loi de Laplace
 $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$

fin du rappel.

La force ressentie par le fil (2), soumis à l'action du fil 1.

Soit un élément de longueur du fil 2, parcouru par un courant I_2 .

$(I_2 d\vec{l})$ va subir l'action du champ $\vec{B}_1$ (créé par le fil 1), donnée par la loi de Laplace:

$$d\vec{F}_{2/1} = I_2 d\vec{l} \wedge \vec{B}_1$$

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{2/1} &= I_2 \cdot dl \cdot (\vec{u}_z \wedge \vec{B}_1 \cdot \vec{u}_\theta) \\ &= I_2 \cdot B_1 \cdot dl \cdot \underbrace{\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta}_{-\vec{u}_r} \end{aligned}$$

$$d\vec{F}_{2/1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \cdot dl \cdot (-\vec{u}_r)$$

D'où selon le principe de superposition

$$\vec{F}_{2/1} = \int d\vec{F}_{2/1} = \frac{-\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r} \cdot \vec{u}_r$$

nouvelle
séance

TD5 : Théorème d'Ampère

3 étapes : - invariances et symétrie

- choix du contour orienté fermé, contour d'Ampère

→ Le contour doit passer par le point M où l'on souhaite calculer $\vec{B}$.

→ $\vec{B}$ tangent au contour en tout point

$$\Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot dl$$

→ $|\vec{B}|$ doit être le même en tout point du contour.

- Appliquer le Th:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

La distribution du courant étant cylindrique, le champ $\vec{B}(M)$ peut s'écrire:

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z) = B_r(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_r + B_\theta(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_\theta + B_z(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_z.$$

Etape 1:

• Invariances:

→ Invariance par rotation autour de l'axe Oz

$$\Rightarrow \forall \theta, \vec{B}(M) = \vec{B}(r, z).$$

→ Invariance par translation le long de (Oz)

$$\Rightarrow \forall z, \vec{B}(M) = \vec{B}(r)$$

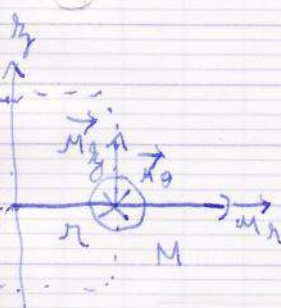
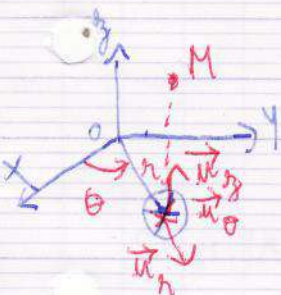
Imp: L'invariance par translation n'est vérifiée que si le fil est infini

• Symétrie:

∃ 1 plan de symétrie contenant M et passant par

$(Oz): (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$

D'où le vecteur $\vec{B}$ est porté par $\vec{u}_\theta$.



L'analyse des invariances et de la symétrie permet de déduire que le champ magnétique s'écrit:

$$\vec{B}(M) = B(r) \cdot \vec{u}_\theta$$

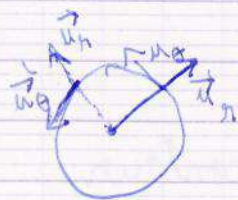
Étape 2: Choix du contour fermé: contour d'Ampère.
Le contour est un cercle concentrique à (Oz) passant par M , de rayon $OM = r$.

Les critères sont vérifiés:

- Le contour passe par le point M .

- Le vecteur $\vec{B}$ est porté par $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\theta \perp$ à $\vec{u}_r$ à chaque instant. Donc tangent au contour en tout point.

- $|\vec{B}|$ est le même en tout point du contour



soit $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos(\angle)$

soit:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$A_y B_y$$



Étape 3: Appliquer le th. d'Ampère:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \oint B(r) \cdot \vec{u}_\theta \cdot d\vec{l} \\ &= \oint B(r) \cdot dl \quad \text{car } \vec{B} \parallel d\vec{l} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{B}(M) &= B(r) \cdot \vec{u}_\theta \\ d\vec{l} &= dl \cdot \vec{u}_\theta \\ dl &= r \cdot d\theta \cdot \vec{u}_\theta \end{aligned} \right\} \vec{B}(M) d\vec{l} = B(r) \cdot r \cdot d\theta$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \oint B(r) \cdot dl = B(r) \oint dl = B(r) \cdot l \\ &= B(r) \cdot 2\pi \cdot r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \oint B(r) \cdot r \cdot d\theta = B(r) r \oint d\theta \\ &= B(r) \cdot r \cdot 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \\ \Rightarrow B(r) \cdot 2\pi \cdot r &= \mu_0 I \\ \Rightarrow B(r) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \vec{u}_\theta$$