

ENTROPIE ET INFORMATION

TD 6 : Théorie de l'information

Exercice 1 :

Trois lampes colorées sont utilisées dans un système de signalisation.

- Combien de symboles pourraient être émis par cette source, sachant qu'une lampe est soit éteinte, soit allumée.
- En déduire l'entropie permise par la taille de cet alphabet.
- En réalité, seulement trois symboles équiprobables sont utilisés. Calculer l'entropie réelle de la source et en déduire sa redondance.

Exercice 2 :

Soit une image de résolution 200x200 avec 4 niveaux de gris. On suppose que les pixels de cette image sont indépendants les uns des autres.

- On suppose que les quatre niveaux de gris ont les probabilités suivantes d'apparaître : $4/8$, $2/8$, $1/8$ et $1/8$. Déterminer l'entropie moyenne apportée par chaque pixel.
- En déduire l'entropie apportée par l'image $H(I)$. (à justifier)
- Dans le cas où les quatre niveaux de gris auraient la même probabilité d'apparaître, déterminer l'entropie apportée par chaque pixel.
- En déduire la redondance en pourcentage.

Exercice 3 :

En supposant que l'être humain peut lire en 1 seconde, 10 mots, appartenant à un vocabulaire de 1024 mots équiprobables. Calculer l'entropie d'une seconde de lecture.

Exercice 4 :

Une image de télévision en noir et blanc possède une résolution verticale de 625 lignes, une résolution horizontale de 500 points et est émise toutes les $1/24^{\text{ème}}$ de seconde. On suppose que l'œil peut distinguer 8 degrés de luminosité différents et équiprobables.

Calculer l'entropie acquise en regardant 1 seconde de télévision.

Exercice 5 :

Une source binaire produit des symboles 0 et 1 avec des probabilités de $2/5$ et $3/5$. La durée d'émission d'un 0 est de 1 ms et celle d'un 1 est de 2 ms.

Calculer l'entropie de cette source, son débit moyen et son taux d'émission.

Emission 6 :

Des symboles e_1 , e_2 et e_3 sont émis à l'entrée d'un canal bruité avec des probabilités 0.6, 0.3 et 0.1. Les symboles e_1 émis sont reçus pour $3/5$ comme des symboles r_1 , pour $1/5$ comme des symboles r_2 et $1/5$ comme des symboles r_3 . Le symbole e_2 émis sont reçus pour $2/3$ comme des symboles r_2 et pour $1/3$ comme des symboles r_3 . Le symbole e_3 est reçu intégralement comme r_3 . Calculer l'information transmise par le canal.

Exercice 7 :

Un émetteur dispose d'un alphabet de 5 symboles (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) et un récepteur d'un alphabet de 4 symboles (r_1, r_2, r_3, r_4). Les probabilités des couples $P(e_i, r_j)$ sont données par :

$$P(e_1, r_1) = 0.25$$

$$P(e_1, r_3) = 0.05$$

$$P(e_2, r_3) = 0.1$$

$$P(e_3, r_3) = 0.1$$

$$P(e_4, r_1) = 0.15$$

$$P(e_4, r_2) = 0.2$$

$$P(e_5, r_4) = 0.15$$

Calculer les entropies caractéristiques de cette transmission.

SH = Shannon

Entropie
TD 6

Exercice n° 1

a. $2^3 = 8$ possibilités

b. $H = - \sum P_i \log_2 P_i$

$$= - \log_2 \left(\frac{1}{8} \right) = \log_2 (8) = 3 \text{ SH / Symboles}$$

c. Entropie :

$$H = \log_2 (3) = 1,58 \text{ SH / Symbole}$$

Redondance

$$R = 1 - \frac{H_R}{H_P} = 1 - \frac{1,58}{3}$$

$$R = 47\%$$

COURS {

- $R = 0\% \Rightarrow$ Info max apportée par les symboles
- $R = 100\% \Rightarrow$ Info nulle apportée par les symboles

Exercice 2.

a. $H_R = - \sum P_i \log_2 P_i$

$$= - \left(\frac{4}{8} \log_2 \left(\frac{4}{8} \right) - \frac{2}{8} \log_2 \left(\frac{2}{8} \right) - \frac{1}{8} \log_2 \left(\frac{1}{8} \right) \right)$$
$$= 1,75 \text{ Sh / Symboles}$$

b. $H_R(I) = 200 \times 200 \times 1,75 = 7 \cdot 10^4 \text{ Sh / Symboles}$

c. $H_p = - \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) = \log_2 (4) = 2 \text{ Sh / Symboles}$

$$H_p(I) = 200 \times 200 \times 2$$
$$= 8 \cdot 10^4 \text{ Sh / Symboles}$$

d. $R = 1 - \frac{H_R}{H_p} = 1 - \frac{7}{8} = 12,5\%$

Exercice 3.

$$H_{\text{smot}} = \log_2 2^{10} = 10$$

at $H_{\text{tot}} = \log 10 = 100 \text{ Sh / Symboles}$
1 seconde

Entropie → 6

Exercice 4.

$$H_{\text{tot}} = \underbrace{24}_{\text{Image}} \times \underbrace{500 \times 625}_{\text{Résolution}} \times \underbrace{\log_2 \left(\frac{8}{1} \right)}_{\substack{\text{Entropie apportée} \\ \text{pour chaque niveau} \\ \text{de gris}}}$$

$$H_{\text{tot}} = 3 \times 24 \times 500 \times 625 = 2,25 \times 10^7 \text{ sh / Symboles}$$

Exercice 5.

Définitions

Débit moyen

$$D_s = \frac{1}{\tau_{\text{moyen}}} \text{ en } \text{Symboles/s}$$

avec $\tau_{\text{moyen}} = \sum_k P_k \tau_k$ temps moyen d'émission d'un symbole.

Taux d'émission

$$T(s) = D_s \times H(s) \text{ en sh/s}$$

$$\tau_{\text{moyen}} = \frac{2}{5} \times 10^{-3} + \frac{3}{5} \times 2 \times 10^{-3}$$

$$D_s = \frac{1}{\tau_{\text{moy}}} = 625 \text{ Sym / s.}$$

~~Exercice n° 5~~

$$H = - \sum P_i \log_2 P_i$$

$$= - \frac{2}{5} \log_2 \frac{2}{5} - \frac{3}{5} \log_2 \frac{3}{5}$$

$$= 0,97 \text{ Sh / symbole}$$

$$T(S) = H(S) \times D_S = 0,97 \times 625$$

$$= 606,25 \text{ Sh / s}$$

Exercice n° 6

Information transmise = information mutuelle entre l'entrée et la sortie.

$$\begin{aligned} I(E, R) &= H(R) - H(R|E) \\ &= H(E) - H(E|R) \end{aligned}$$

$$H(R) = ?$$

$$H(R) = - \sum_k P(r_k) \log_2 P(r_k)$$

$$\text{or } P(r_k) = \sum_j P(r_k | e_j) P(e_j)$$

pour $k = 1, 2 \text{ et } 3$

$$P(r_1) = 0,36 \quad P(r_2) = 0,32 \quad P(r_3) = 0,32$$

$$\begin{aligned} H(R) &= - (0,36 \times \log_2(0,36) + (0,32 \log_2(0,32)) \times 2) \\ &= 1,58 \text{ Sh / symbole} \end{aligned}$$

Entropie TD 6

Exercise 6 (Suite)

$$H(R|E) = ?$$

$$H(R|E=e_1) = - \sum_k P(R=r_k | e_1) \log_2 P(r_k | e_1)$$

$$H(R|E=e_2) = - \sum$$

$$H(R|E=e_3) = - \sum$$

$$H(R|E) = H(R|E=e_1) \times P(e_1) + H(R|E=e_2) \times P(e_2) \\ + H(R|E=e_3) \times P(e_3)$$

$$H(R|e_1) = - \sum P(R=r_k | e_1) \log_2 (r_k | e_1)$$

$$= - \left[\frac{3}{5} \log_2 \left(\frac{3}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} \log_2 \left(\frac{1}{5} \right) \right) \times 2 \right]$$

$$= 1,37 \text{ Sh / Symbole}$$

$$H(R|e_2) = 0,92 \text{ Sh / Symbole}$$

$$H(R|e_3) = 0 \text{ Sh / Symbole}$$

$$H(R|E) = 1,37 \times 0,6 + 0,92 \times 0,3 + 0 \\ = 1,16 \text{ Sh / Symbole}$$

Exercise no 7.

$$I(E, R) = H(R) + H(E) - H(E, R)$$

Info
mutuelle

$$P(r_1) = P(e_1, r_1) + P(e_4, r_1) = 0,4$$

$$P(r_2) = P(e_4, r_2) = 0,2$$

$$P(r_3) = P(e_1, r_3) + P(e_3, r_3) = 0,25$$

$$P(r_4) = P(e_5, r_4) = 0,15$$

$$H(R) = - \sum_k P(r_k) \log_2 P(r_k)$$

$$= - (0,4 \log_2 0,4 + 0,2 \log_2 0,2 + 0,25 \log_2 0,25 + 0,15 \log_2 0,15)$$

$$= 1,90 \text{ Sh / Symbole}$$

$$H(E) = - \sum_k P(e_k) \log_2 P(e_k)$$

$$P(e_1) = P(e_1, r_1) + P(e_1, r_3) = 0,3$$

$$P(e_2) = P(e_2, r_1) = 0,10$$

$$P(e_3) = P(e_3, r_3) = 0,10$$

$$P(e_4) = 0,15 + 0,2 = 0,35$$

$$P(e_5) = 0,15$$

$$H(E) = - (0,3 \log_2 0,3 + 0,35 \log_2 0,35 + 0,15 \log_2 0,15 + 2 \times 0,10 \log_2 0,1)$$
$$= 2,12 \text{ Sh / Symbole}$$