

Interrogation de TD « Energie, entropie et information » L2 2015/2016

jeudi 19 mai 2016, 45 minutes

Aucun document ni calculatrice autorisés, les deux parties sont indépendantes.

Une source S émet 5 symboles (A, B, C, D, E) avec les probabilités suivantes : $p(A) = 3/10$; $p(B) = 4/10$; $p(C) = p(D) = p(E) = 1/10$.

Partie A (/8)

1. Calculer l'entropie de cette source S .
2. Calculer l'entropie d'une source $S_{\text{équi}}$ qui émettrait 5 symboles équiprobables.
3. En déduire la redondance de la source S .

Un message M est émis à partir de cette source pendant $10s$ avec une fréquence de $1kHz$.

4. Calculer le nombre de symboles K émis par ce message.
5. En déduire l'entropie de ce message M .

Cette source S est transmise à l'aide d'un canal bruité. Les symboles C, D et E sont intégralement reçus comme des symboles C', D' et E' (aucune erreur de transmission), alors que les symboles A sont reçus pour $2/3$ comme des symboles A' et pour $1/3$ comme des symboles B' , et que les symboles B sont reçus pour $1/2$ comme des symboles B' et pour $1/2$ comme des symboles C' . On appelle S' la source à la sortie du canal.

Partie B (/12)

1. Proposer un schéma représentant le fonctionnement de ce canal.
2. Calculer l'information transmise par ce canal s'il n'était pas bruité.
3. Calculer l'entropie de la source S' .
4. Calculer l'entropie conditionnelle $H(S'/S)$.
5. Calculer l'information transmise par ce canal bruité.

Aide numérique : $\log_2 3 = 1,6$; $\log_2 5 \sim 2,3$

NOM CHAZAL
Prénom Baptiste

Promo 2019 - L2

Date 19 mai 2016

14/20

MATIÈRE *Energie, entropie & information*

Partie A

1.

$$I_i = \log_2 \left(\frac{1}{p_i} \right)$$

$$\begin{aligned} H(s) &= \sum_i p_i I_i = \frac{3}{10} \log_2 \left(\frac{10}{3} \right) + \frac{4}{10} \log_2 \left(\frac{10}{4} \right) + 3 \left(\frac{1}{10} \log_2 10 \right) \\ &= \frac{3}{10} (\log_2 10 - \log_2 3) + \frac{4}{10} (\log_2 10 - \log_2 4) + \frac{3}{10} (\log_2 2 + \log_2 5) \\ &= \frac{3}{10} \log_2 10 - \frac{3}{10} \log_2 3 + \frac{4}{10} \log_2 10 - \frac{4}{10} \log_2 4 + \frac{3}{10} (3) \\ &= \frac{7}{10} (\log_2 2 + \log_2 5) - \frac{3}{10} (1,6) - \frac{4}{10} (2) + \frac{3}{10} (3,3) \\ &= \frac{4}{10} (3,3) - \frac{3}{10} (1,6) - \frac{8}{10} + \frac{3}{10} (3,3) \\ &= \frac{23,1 - 4,8 - 8 + 9,9}{10} \\ &= \frac{20,2}{10} \\ &= 2,02 \text{ bits/symbole.} \end{aligned}$$

3

2.

Les symboles sont équiprobables.

Donc $H(S_{\text{eq}}) = \log_2(N) = \log_2(5) \approx 2,3 \text{ bits/symbole.}$

3

3.

2

0

4.

fréquence de 1 kHz $\rightarrow$ 1000 symboles par seconde ✓

durée de 10s $\rightarrow 10 \cdot 1000 = 10\,000$ symboles sont émis par ce message. ✓

3

5.

On recherche l'entropie du message π émis par la source S .

Le message π dure 10s.

$$H(10s) = n H(S) = 10\,000 \cdot 2,02$$

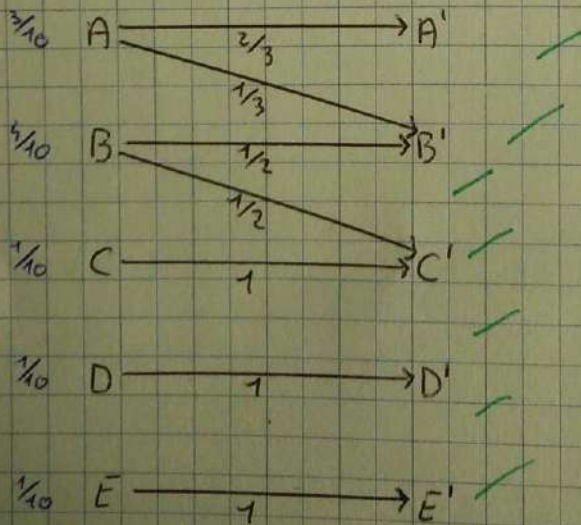
$$= 20\,200 \text{ unité ?}$$

2

Partie B

1.

Schéma du fonctionnement du canal :



3

2.

7

0

3.

$$p(E') = p(E) = \frac{1}{10}.$$

$$p(D') = p(D) = \frac{1}{10}.$$

$$p(C') = p(C) + \frac{1}{2} p(B) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}.$$

$$p(B') = \frac{1}{2} p(B) + \frac{1}{3} p(A) = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}.$$

$$p(A') = \frac{2}{3} p(A) = \frac{2}{10}.$$

$$\begin{aligned} H(S') &= \sum p_i I_i = \frac{1}{10} \log_2(10) + \frac{1}{10} \log_2(10) + \frac{3}{10} \log_2\left(\frac{10}{3}\right) + \frac{3}{10} \log_2\left(\frac{10}{3}\right) + \frac{2}{10} \log_2\left(\frac{10}{2}\right) \\ &= \frac{2}{10} (\log_2(2) + \log_2(5)) + \frac{3}{10} (\log_2(10) - \log_2(3)) + \frac{3}{10} (\log_2(10) - \log_2(3)) + \frac{2}{10} \log_2(5) \\ &= \frac{2}{10} (3,3) + \frac{6}{10} (\log_2(2) + \log_2(5)) - \frac{6}{10} \log_2(3) + \frac{2}{10} (2,3) \\ &= \frac{6,6}{10} + \frac{6}{10} (3,3) - \frac{6}{10} (1,6) + \frac{4,6}{10} \\ &= \end{aligned}$$