



ZOU
Philippe

L2+CPI2
2013

Groupe B

de Maths du réel.

Exercice 1 : Une fonction f est concave si sa dérivée seconde est supérieure ou égale à zéro et convexe si sa dérivée seconde est inférieure ou égale à zéro.
 f définie sur $\mathbb{R}^3$ par
 $f(x, y, z) = -x^2 + xy - y^2 + 2xz + 3yz$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + y + 2z$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y + 3z$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x + 3y$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Soit M sa représentation matricielle

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = -2 < 0$$

$$A_{22} = -2(-2) - 1 = 3 > 0$$

$$A_{33} = (1 \times 3 \times 2 + 2 \times 1 \times 3) - (-2 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2) \\ = 12 - (-18 - 8) = 38 > 0$$

(3, 1)

?

Exercice 2.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial z} = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial xy} = xz + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial x} = z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial z} = x$$

$$\frac{\partial f}{\partial yz} = xy - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial z} = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial z} = x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z^2} = 0$$

déterminons le ou les points critiques de la fonction.

$$\vec{\text{grad}}(f)(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + yz = 0 \\ xz + 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + yz = 0 \\ z = y - \frac{1}{x} \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

en remplaçant dans la première ligne :

$$x + \left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$x - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{soit } x = 0$$

ou $x \neq 0$ d'après le

domaine de définition.

$$\text{soit } 1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$x = 1.$$

donc

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

4

on a donc la Hessienne suivante :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = 1 > 0$$

$$A_{22} = -1 < 0$$

$$A_{33} = -3 < 0$$

on ne peut pas conclure.

Exercice 4.

$$D = [1; 2] \times [1; 2]$$

$$I = \iint \frac{1}{1+x+y} dx dy = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{x+y+1} dx dy$$

I est de la forme $\frac{u'}{u}$, sa primitive est donc $\ln(|u|)$

$$I = \int_1^2 \left[\ln(1+y+x) \right]_{x=1}^{x=2} dy$$

ici le domaine est $[1; 2]$, pas besoin de valeur absolue.

$$= \int_1^2 [\ln(3+y) - \ln(2+y)] dy$$

la primitive de $\ln x$ est $x \ln(x) - x$.

$$I = \left[(3+y) (\ln(3+y)) - (3+y) \right]_{y=1}^{y=2} - \left[(2+y) \ln(2+y) - (2+y) \right]_{y=1}^{y=2}$$

$$= 5 \ln(5) - 5 - 3 \ln(3) + 3$$

$$= 5 \ln(5) - 3 \ln(3) - 2 \approx 2,75$$

3

Exercice 3.

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$g(x, y) \text{ la contrainte: } g(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

$$\frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x} = 2x - 2\lambda x$$

$$\frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial y} = -2y - 2\lambda y.$$

$$\vec{\text{grad}}(f - \lambda g) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ -2y - 2\lambda y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1. \end{cases}$$

Pour $\lambda = 1$:

$$2x - 2\lambda x = 0.$$

$$-2y - 2\lambda y = -4y.$$

Pour $\lambda = -1$

$$2x + 2\lambda x = 0$$

$$-2y + 2\lambda y = 0$$

Donc le point $(0, 0)$ est un point critique de la fonction.

2.

Exercice 5.

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

$$I = \iiint x^2 + y^2 + z^2 \, dx \, dy \, dz.$$

en fixant x , $x \leq 1 - y - z$, puis y , $y \leq 1 - z$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} x^2 + y^2 + z^2 \, dx \, dy \, dz$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-z} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x + z^2 x \right]_0^{1-y-z} dy \, dz$$

3

$$= \int_0^1 \int_0^{1-z} \left[\frac{(1-y-z)^3}{3} + y^2(1-y-z) + z^2(1-y-z) \right] dy \, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-z} \frac{1}{3} \left[1 - 3z - 3y + 3z^2 + 3y^2 + 4zy - z^3 - y^3 - 3zy^2 - 3z^2y + 3y^2 - 3y^3 - 3yz^2 + 3z^2y - 3z^3 \right] dy \, dz.$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \int_0^{1-z} 1 + 6y^2 + 6z^2 - 3z - 3y + 4y^3 - 4z^3 + 4zy - 6zy^2 - 6z^2y \, dy \, dz.$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \left[y + \frac{6y^3}{3} + 6z^2y - 3zy - \frac{3y^2}{2} + \frac{4y^4}{4} - 4z^3y + \frac{4zy^2}{2} - \frac{6zy^3}{3} - \frac{6z^2y^2}{2} \right]_0^{1-z} dy \, dz$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \left[1 - z + 2(1 - 3z + 3z^2 - z^3) + 6z^2(1 - z) - 3z(1 - z) - \frac{3(1 - z)^2}{2} - 4(1 - 3z + 3z^2 - z^3) \right] dz$$

= ?





