

Introduction à la mécanique quantique

Jordan VIARD

Mai 2011

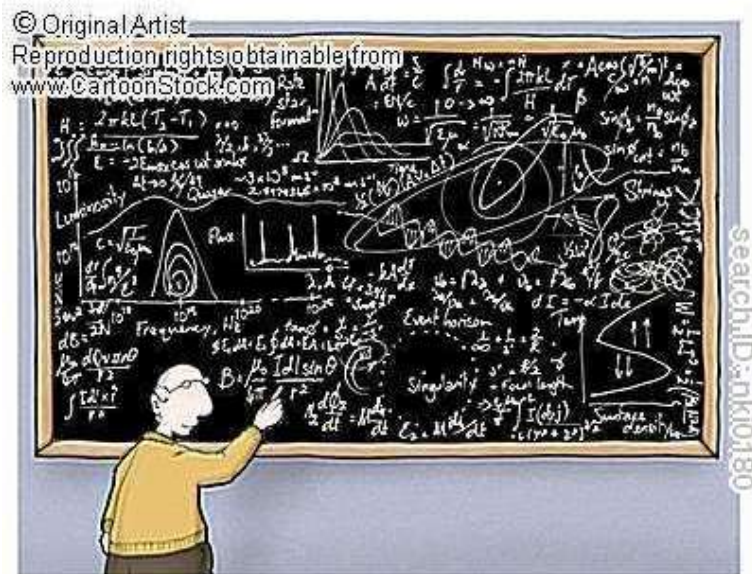


Table des matières

.1	Avant-propos	2
I	Introduction à la théorie des quanta	3
I.2	Physique classique : l'échec	4
I.2.1	Le rayonnement du corps noir	4
I.2.2	L'effet photo-électrique	5
I.2.3	Les spectres atomiques	5
I.3	Dualité onde-corpuscule	5
I.3.1	Hypothèse ondulatoire de Louis de Broglie	5
I.4	Quantification de l'énergie dans l'atome	5
I.4.1	L'atome : qui est-il ?	5
I.5	Mesure, processus aléatoires	7
II	Concepts de la mécanique quantique	8
II.6	Ondes et fonctions d'onde	9
II.6.1	Quelques rappels ondulatoires	9
II.6.2	Description d'une particule quantique	10
II.7	Équation d'évolution des fonctions d'onde : l'équation de Schrödinger	11
II.7.1	Dérivée partielle par rapport au temps	12
II.7.2	Dérivée partielle par rapport à la position	13
II.7.3	Formulation générale de l'équation de Schrödinger	13
II.7.4	Principe de superposition	14
II.7.5	Principe de correspondance	14
II.7.6	Mesure des grandeurs physique	14
II.8	Paquet d'onde et principe d'incertitude de Heisenberg	14
II.8.1	Paquet d'onde	14
II.8.2	Principe d'incertitude de Heisenberg	16
III	Annexes	17
III.1	Table des niveaux d'énergie	18

.1 Avant-propos

La mécanique quantique, souvent perçue comme extrêmement ardue, n'est plus réservée aux seuls physiciens. Des objets de la vie quotidienne au désormais célèbre *ordinateur quantique*, ses applications concrètes ne cessent de se diversifier. Je vous souhaite une excellente lecture!

Le présent document est publié sous licence Creative Commons CC-BY-NC. Cela signifie que vous pouvez le copier, distribuer, modifier à volonté tant que vous citez l'auteur original, et que la redistribution reste non commerciale.

Malgré le soin apporté à sa rédaction et sa relecture, ce cours n'est peut-être pas exempt d'erreurs. Vous en avez repéré une ? Merci de la reporter à l'adresse *jordan.viard@gmail.com*.

Première partie

Introduction à la théorie des quanta

En 1900, la physique classique distingue 2 concepts très différents : *ondes* et *particules*.

I.2 Physique classique : l'échec

Malgré une foi aveugle en la physique classique, elle n'explique pas tout. Certains phénomènes restent jusqu'en 1900 contraires à toute loi.

1. Le rayonnement du corps noir ;
2. L'effet photo-électrique ;
3. Les spectres atomiques.

I.2.1 Le rayonnement du corps noir

Avant de se pencher sur le problème occasionné par ce «rayonnement», commençons par définir ce qu'est un corps noir. Il s'agit d'un objet idéal, dont le spectre électromagnétique ne dépend que de la température. En d'autres termes, cela veut dire que cet objet absorbe tous les rayons lumineux venant sur lui ; c'est d'ailleurs de là que vient l'appellation de «corps noir» : un objet ne réfléchissant aucune lumière apparaît de couleur noire.

Les physiciens avaient à ce moment là une théorie qui leur permettait de prédire l'intensité du rayonnement en fonction de la longueur d'onde : la théorie *classique*. Le physicien Wien a mis en place un protocole expérimental afin de vérifier les résultats de cette théorie. Les résultats relevés sont visibles en figure N.

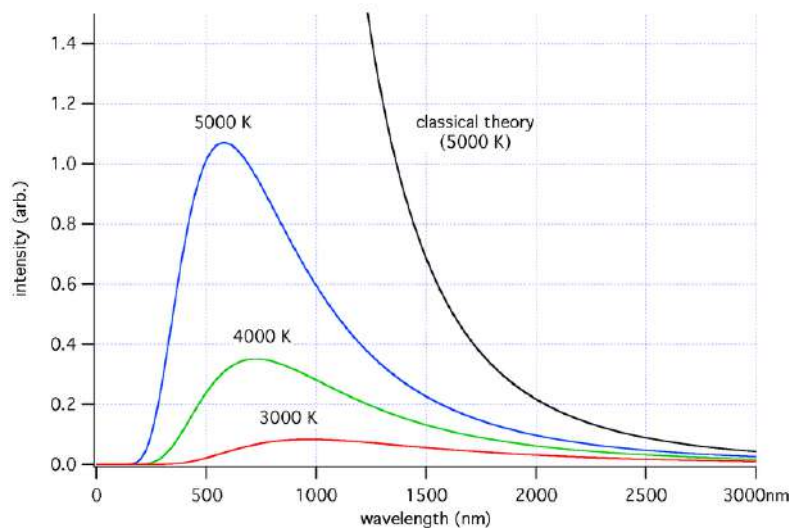


FIGURE 1 – Résultats relevés par Wien pour le rayonnement du corps noir¹

I.2.2 L'effet photo-électrique

I.2.3 Les spectres atomiques

I.3 Dualité onde-corpuscule

I.3.1 Hypothèse ondulatoire de Louis de Broglie

C'est le scientifique français Louis de Broglie, qui, le premier, a mis en évidence la dualité onde-corpuscule. En combinant les équations de la relativité d'Einstein avec celles de Planck (de la théorie des quanta), il est parvenu à un lien entre la nature ondulatoire et corpusculaire d'une particule. En effet :

$$E = pc \text{ (c'est une réécriture de la célèbre équation } E = mc^2, \text{ en prenant en compte le fait que } p = mv)$$

I.4 Quantification de l'énergie dans l'atome

Maintenant que la dualité onde-corpuscule de la lumière a été mise en évidence, il est intéressant de se pencher sur la manière dont l'énergie est quantifiée au sein même de l'atome. Pour cela, un bref historique des modèles atomiques émerge de l'histoire s'impose, afin de bien comprendre les implications de chaque changement de modèle, et ainsi les forces et faiblesses de chaque modélisation.

I.4.1 L'atome : qui est-il ?

Il y a eu cinq grands modèles de représentation des atomes. Le tout premier a été introduit par Aristote durant l'Antiquité. C'est d'ailleurs de là que vient le nom «atome» ! Il signifie «indivisible» en grec, car à l'époque, nul ne pensait que les atomes seraient eux-mêmes formés de particules plus petites...

Ce modèle n'était pas pleinement satisfaisant : rapidement, les scientifiques de tout poil se sont rendus compte que des charges électriques étaient en jeu, et qu'il y avait plusieurs types d'atomes bien distincts ! Ces conclusions ont mené au modèle «plumb-pudding» de Thomson (alias Lord Kelvin). Ce modèle s'est révélé incorrect à la suite de l'expérience suivante, menée par Rutherford :

En 1907, Rutherford est convaincu que le modèle atomique de Thomson est erroné. Pour s'en convaincre, il met en place le dispositif visible en figure 1. Une source émet un rayonnement de particules α , tout droit sur une fine feuille d'or. Autour de cette feuille d'or et placé un écran, en or lui aussi, entourant la feuille tout en laissant le rayon frapper directement la feuille. Selon le modèle de Thomson, la feuille d'or va se comporter comme une barrière pour les particules α , c'est-à-dire que la majorité des impacts sur l'écran sera située sur la moitié de l'écran entre l'émetteur et la feuille d'or. L'expérience montre *l'exact opposé* : le plus grand nombre d'impacts se situe...directement derrière la feuille d'or !

Rutherford en conclut alors que le modèle atomique de Thomson est faux. Effectivement, si les particules α ont – pour la majeure partie – pu traverser la feuille, c'est que cette même feuille comportait des "trous" laissant passer les particules. Pour la première fois, un modèle faisant distinctement la différence entre le *noyau* et les *couches d'électrons* apparaît. Dans ce modèle, le noyau concentre 99% de la masse de l'atome, et les électrons en sont séparés : ils gravitent autour du noyau.

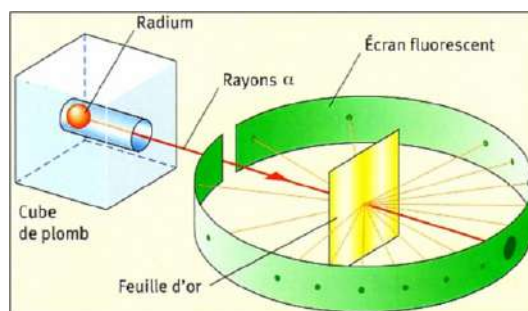


FIGURE 2 – Expérience de Rutherford

Rapidement, ce modèle soulève un problème de taille. Ici, l'électron gravitant autour du noyau se comporte comme un dipôle oscillant. Un tel dipôle, selon les lois de l'électromagnétisme énoncées par Maxwell, est voué à perdre de l'énergie. Selon ces postulats, la durée de vie d'un atome n'excéderait pas 10^{-8} secondes ! Or, l'atome est stable...

Niels Bohr, élève émérite de Rutherford, propose alors une "amélioration" de la modélisation de Rutherford permettant de conserver un modèle séparant noyau et électrons. Ce modèle porte le nom de *planétaire*, car il se base sur le modèle planète-satellite (déjà élucidé à l'époque). Ce modèle stipule qu'il existe des orbites "permises", des orbites où la force électrostatique et la force centrifuge s'équilibrent. À présent que l'on connaît le rayon des orbites permises, on peut calculer l'énergie de chacune de ces orbites. Il suffit de se souvenir que $E = E_c + V$, où E représente les énergies totales des orbites, E_c l'énergie cinétique, et V la force électrostatique. Facile, il n'y a que deux forces en action !

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} \Leftrightarrow \frac{p^2}{2m}$$

Où p est l'*impulsion* et vaut le produit $m \times v$.

De même, la force électrostatique peut se calculer par :

$$V = \int \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \Leftrightarrow \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d}{dr^2}$$

On en conclut (par simple substitution), que :

$$E_n = \frac{E_0}{n^2}$$

Ainsi, on peut évaluer E_0 à 13,6 eV.

Rappel : un électron-Volt (eV) vaut $1,60217646 \times 10^{-19}$ Joules. C'est une manière de mesurer l'énergie adaptée au monde atomique.

Le modèle planétaire de Bohr apprend une chose fondamentale : *les électrons ne peuvent se trouver qu'à des niveaux d'énergie très précis, et nulle part ailleurs*. La figure 2 montre un diagramme de ces niveaux d'énergie.

Cela ne résout pas directement le problème posé par le modèle de Rutherford. Ainsi, Bohr explique les phénomènes d'absorption et d'émission d'ondes

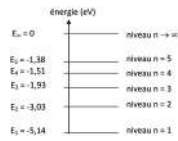


FIGURE 3 – Les niveaux d'énergie de l'électron

électromagnétiques par des *transitions d'un électron d'un état stable é un autre*. L'énergie portée par l'onde électromagnétique émise vaut alors :

$$h\nu = \Delta E = E_i - E_f$$

Où E_i et E_f sont les énergies des états initial et final. Un schéma de cette situation est visible en figure 3.

I.5 Mesure, processus aléatoires

L'expérience du "tireur fou" présentée plus haut a mis en exergue un paradoxe fondamental : On peut toutefois se demander : que se passe-t-il si l'on réduit l'intensité du faisceau lumineux jusqu'à ce que les électrons passent *1 par 1* ?

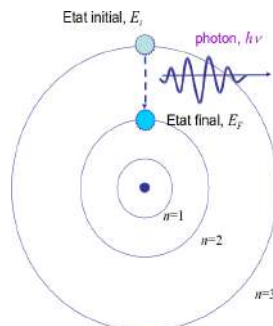


FIGURE 4 – Variations d'énergie dans l'atome

Deuxième partie

Concepts de la mécanique quantique

Nous avons vu tout dernièrement que la dualité onde-corpuscule se manifestait lorsque les dimensions de l'action approchaient h , la constante de Planck.

II.6 Ondes et fonctions d'onde

II.6.1 Quelques rappels ondulatoires

Nous allons le voir très vite, les ondes forment un excellent moyen de décrire la mécanique quantique. Nous nous intéresserons surtout aux *ondes stationnaires*, et par conséquent périodiques dans l'espace (x) qu'elles traversent. Mathématiquement, cela veut dire que :

$$f(x + n\lambda) = f(x)$$

où λ représente la *longueur d'onde* et n un nombre entier naturel quelconque.

Il est par ailleurs extrêmement simple de décrire une onde plane par une fonction. Cette fonction, très originalement dénommée $f(x)$, se décrit comme suit :

$$f(x) = A[\cos kx + i \sin kx] \quad (1)$$

Ici, A représente l'amplitude de l'onde, et k le "nombre d'onde", c'est-à-dire le rapport $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

On peut également pousser le vice et considérer que cette onde est en mouvement dans l'espace, é une vitesse $\vec{v}$.

$$v = \|\vec{v}\| = \frac{\lambda}{T} \quad (2)$$

où λ est toujours la longueur d'onde, et T la période de l'onde ($\frac{1}{\text{fréquence}}$). Par la suite, afin de conserver une cohérence dans les notations, la fréquence sera notée ν (prononcez "nu").

On définit également la pulsation de l'onde : $\omega = 2\pi\nu$. Cette grandeur représente une vitesse de rotation, ou *vitesse angulaire*.

Nous avons défini plus haut une fonction d'onde plane, mais ce n'est pas suffisant. On peut également imaginer une fonction é deux variables, décrivant l'évolution de l'onde dans l'espace et dans le temps. Aussitôt dit, aussitôt fait !

Considérer que l'onde se déplace revient, *in fine*, é considérer que l'espace (x) se déplace au cours du temps, soit un état du système au temps t' : $x' = x + vt'$. Or nous savons que $v = \frac{\lambda}{T}$. C'est la vieille formule bien connue : $\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$.

$$v = \frac{1}{T}\lambda$$

Or, $\omega = 2\pi\nu$, et $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Souvenons-nous également que $\nu = \frac{1}{T}$. Par simple substitution, on aboutit é :

$$v = \frac{\omega}{2\pi} \times \frac{2\pi}{k}$$

La vitesse de propagation de l'onde (que l'on appelle *vitesse de phase*) est donc équivalente é :

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (3)$$

En remplaçant :

$$x' = x + \frac{\omega}{k}t'$$

Il suffit é présent d'adapter notre équation d'onde plane $f(x)$ pour prendre en compte la dimension temporelle :

$$f(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (4)$$

Que l'on ne se méprenne pas : le signe "-" entre les termes " kx " et " ωt " est purement conventionnel. Il résulte du fait que l'on suppose que $t > 0$ et $x > 0$, ce qui reste cohérent en physique.

II.6.2 Description d'une particule quantique

En mécanique quantique, une particule est décrite par une *fonction d'onde*, notée comme suit :

$$\psi(\vec{r}, t) = A \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)] \quad (5)$$

Selon ce formalisme puissant mais abstrait, ψ contient *toute l'information* sur la particule. On peut é présent manipuler ψ , afin de remplacer certaines valeurs que nous connaissons bien.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ or, } \lambda = \frac{h}{p}. \text{ Ainsi, } k = \frac{2\pi}{h}p = \frac{p}{\hbar}$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite. De plus :

$$\omega = 2\pi\nu \text{ et } E = h\nu$$

D'où une autre formulation de ψ :

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)} \quad (6)$$

On peut é présent se poser la question du sens physique de ψ . On peut partiellement l'expliquer par l'expérience des fentes d'Young. Cette expérience, très simple, consiste é faire passer deux ondes lumineuses (par exemple des lasers) au travers de 2 fentes, et d'observer un point donné d'un écran, afin de constater le résultat de la diffraction. Un schéma du protocole expérimental est visible en figure 4.

On a, en entrée : $\psi_{in} = Ae^{i(kx - \omega t)}$. Et en sortie : $\psi_{out} = \psi_A + \psi_B$. Ainsi, la probabilité de l'onde (ou particule, au choix!) atteigne un point M donné est :

$$P(M) = |\psi_{out}(x = m)|^2 = |\psi_A + \psi_B|^2$$

Physiquement, ψ représente une *amplitude de probabilité* tandis que $|\psi|^2$ représente une *densité de probabilité de présence*.

Que vaut donc $|\psi|^2$? $|\psi|^2 = \psi^* \times \psi$, où ψ^* est le complexe conjugué de ψ . Ainsi :

$$Ae^{-i(kx - \omega t)} \times Ae^{i(kx - \omega t)} = A^2 e^{ix} = A^2$$

Par extension, on peut facilement déduire la probabilité que la particule soit présente dans un petit élément d'espace dV .

$$dP(\vec{r}) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV \quad (7)$$

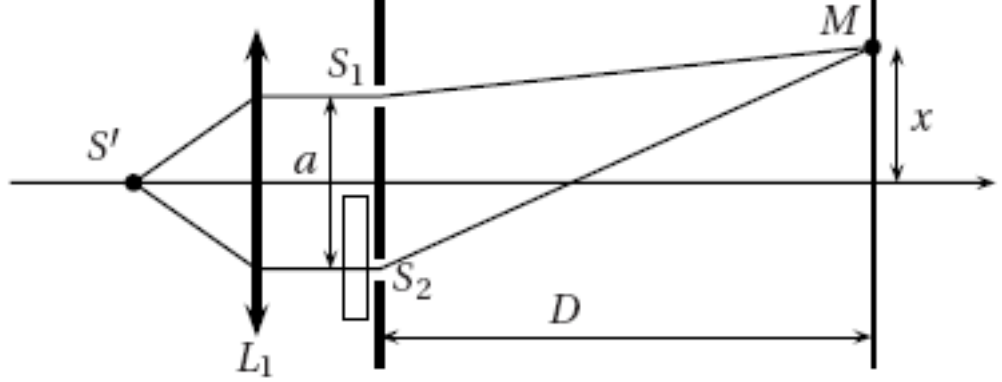


FIGURE 5 – Expérience des fentes d'Young

On peut en déduire une *condition de normalisation*, la probabilité de trouver la particule dans tout l'espace.

$$P = \int_V dP(x) = \int_V |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1 \quad (8)$$

Conclusion d'une logique remarquable.

Si l'on en revient à la probabilité de présence en un point donné et à l'expérience d'Young, on conclut que sur un flux de particules en entrée des fentes, la probabilité de mesure n'est *pas identique pour chaque point*. La distribution des impacts sur l'écran est fonction de la densité de probabilité $|\psi|^2$, et un histogramme est visible en figure 5.

Sur la figure, il faut bien garder en tête que l'on considère un ensemble de N mesures :

- Ayant pour valeur moyenne $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi(x)|^2 dx$;
- Présentant une dispersion Δx autour de $\langle x \rangle$, avec $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.

II.7 Équation d'évolution des fonctions d'onde : l'équation de Schrödinger

La construction de l'équation de Schrödinger est assez simple. Il suffit de se souvenir de l'équation de Schrödinger est une équation différentielle du second ordre, dont les solutions sont des fonctions d'onde $\psi(x, t)$.

La méthodologie sera la suivante : nous allons tout d'abord dériver par rapport au temps, puis par rapport à la position (x) (on aurait tout à fait pu faire l'inverse) :

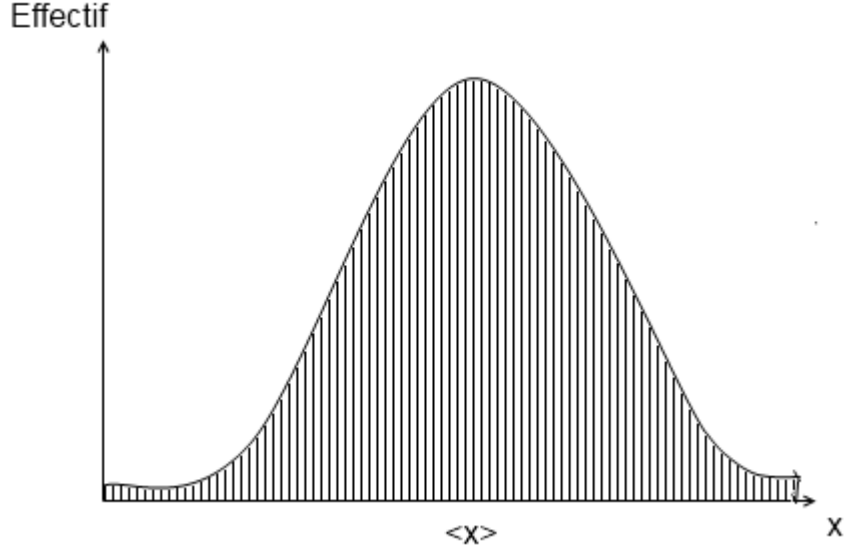


FIGURE 6 – Histogramme des impacts sur l'écran

II.7.1 Dérivée partielle par rapport au temps

$$\frac{\delta}{\delta t}\psi(x, t) = \frac{\delta}{\delta t}(Ae^{i(kx - \omega t)}) = -i\omega(Ae^{i(kx - \omega t)}) = -i\omega\psi$$

Or, nous savons que $E = h\nu = \hbar\omega$. Par simple remplacement, on a :

$$\frac{\delta}{\delta t}\psi = -\frac{i}{\hbar}E\psi$$

Ainsi :

$$i\hbar\frac{\delta}{\delta t}\psi = E\psi \quad (9)$$

Cette toute dernière relation est particulièrement intéressante, car elle nous permet de définir une nouvelle notion : celle d'*opérateur*. Il s'agit simplement d'une application entre deux espaces vectoriels. Dans le cadre de la mécanique quantique, il s'agit plutôt d'un objet qui agit sur l'espace des fonctions d'onde. Les valeurs propres d'un opérateur sont les résultats possibles de la mesure.

L'opérateur "énergie" vaut $\hat{E} = i\hbar\frac{\delta}{\delta t}$, tel que :

$$\hat{E}\psi = E\psi \quad (10)$$

Grâce à cet opérateur, nous sommes en mesure de quantifier l'énergie de la particule portée par la fonction d'onde.

II.7.2 Dérivée partielle par rapport à la position

Dérivons é présent par rapport é x :

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta x}\psi(x, t) &= ikAe^{i(kx-\omega t)} \\ \frac{\delta^2}{\delta x^2}\psi(x, t) &= \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta}{\delta x}\psi\right) = \frac{\delta}{\delta x}\left(ikAe^{i(kx-\omega t)}\right) = -k^2\psi(x, t)\end{aligned}$$

Cependant, le k n'est pas particulièrement commode : on peut s'en débarrasser – pour le remplacer par des constantes plus fondamentales – grâce aux quelques formules que nous connaissons.

$$\begin{aligned}\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \text{ et } \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar} \\ \frac{\delta^2}{\delta x^2}\psi = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi\end{aligned}\tag{11}$$

Ce n'est pas fini ! En effet, nous avons exprimé cette dérivée en fonction de constantes fondamentales. Cependant, on ne peut pas encore y discerner un opérateur. En allant plus avant, nous savons que $p = mv$, donc que $p^2 = m^2v^2$, mais également que l'énergie cinétique E_c vaut $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. ON en déduit que $p^2 = 2mE_c$.

Finalement, $\frac{\delta^2}{\delta^2}\psi = -\frac{2m}{\hbar}E_c\psi$, et :

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\delta^2}{\delta^2}\psi = E_c\psi\tag{12}$$

II.7.3 Formulation générale de l'équation de Schrödinger

Cas d'une particule libre

Nous allons é présent considérer le cas de l'équation de Schrödinger pour une particule libre (comprenez : qui n'est souis é aucun potentiel extérieur). Pour une telle particule, on a :

$$E = E_c + V(=0) \Leftrightarrow E = E_c$$

Ainsi, en combinant les deux opérateurs calculés précédemment :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\delta^2}{\delta x^2}\psi(x, t) = i\hbar\frac{\delta}{\delta t}\psi(x, t)}\tag{13}$$

C'est la formulation de l'équation de Schrödinger pour une particule libre. On peut également l'écrire en termes d'opérateurs :

$$\hat{E}_c = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Rightarrow \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi = \hat{E}_c\psi$$

Soit l'équation de Schrödinger :

$$\hat{H}\psi(x, t) = \hat{E}\psi(x, t)\tag{14}$$

Où $\hat{H}$ est l'opérateur *hamiltonien*.

Cas d'une particule non-libre soumise à un potentiel

L'unique paramètre à modifier est l'énergie totale, qui vaut maintenant $E = E_c + V$, où V représente un potentiel. Ceci équivaut à $E = \frac{p^2}{2m} + V$. L'hamiltonien devient donc :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\delta^2}{\delta x^2} + V$$

II.7.4 Principe de superposition

Le principe qui suit, pourtant très simple lorsque l'on a compris le principe des fonctions d'onde, forme l'une des pierres d'achoppement de la mécanique quantique. Si l'on considère deux fonctions d'onde quelconques, et deux coefficients A et B complexes, alors :

$$\Psi = A\psi_1 + B\psi_2$$

...est aussi une fonction d'onde. Cette propriété est d'ailleurs tout à fait compatible avec l'équation de Schrödinger : si ψ_1 et ψ_2 sont solutions de l'équation, alors Ψ le sera aussi.

La conséquence de ce principe est simple : l'ensemble des solutions de l'équation de Schrödinger $\psi(x, t)$ forme un espace vectoriel complexe. En conséquence, la condition de normalisation sur cet espace est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

Le principe de superposition est la propriété qui permet, notamment, de dire qu'une particule est "dans deux états à la fois".

II.7.5 Principe de correspondance

Nous avons vu dès la première partie qu'en mécanique quantique, le résultat d'une mesure est *aléatoire*. Pire encore : le fait d'effectuer une mesure peut perturber le système, et modifier son état ! On utilise alors des opérateurs pour décrire des quantités *observables*.

- Position : $\vec{r}(x, y, z)$ tel que $\hat{r}\psi = \vec{r}\psi$;
- Impulsion : $\hat{p}\psi = -i\hbar \frac{\delta}{\delta x}\psi$;
- Énergie : $\hat{E}\psi = i\hbar \frac{\delta}{\delta t}\psi = E\psi = \hbar\omega\psi$;

II.7.6 Mesure des grandeurs physiques

II.8 Paquet d'onde et principe d'incertitude de Heisenberg

II.8.1 Paquet d'onde

Reprenons un instant la fonction utilisée pour définir une onde plane :

$$A [\cos kx - \omega t + i \sin kx - \omega t]$$

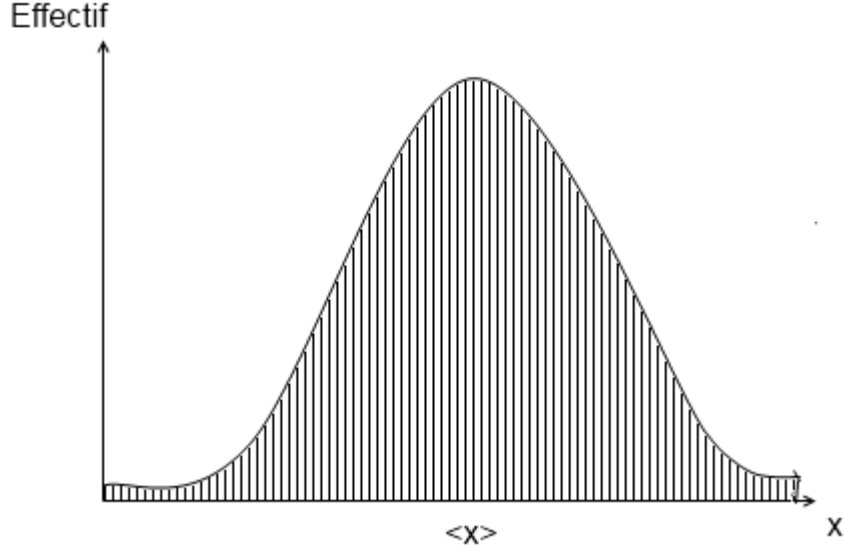


FIGURE 7 – Paquet d'onde

J'ai un peu menti tout à l'heure, lorsque j'ai dit qu'une particule pouvait être représentée par sa fonction d'onde. C'est vrai, cependant une description réaliste consiste à représenter une particule par un *paquet d'onde*, c'est-à-dire une superposition d'ondes planes. La fonction d'onde devient ainsi :

$$\psi(x, t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

Où $\phi(k)$ représente la distribution de l'état k . Il s'agit de la définition de la transformation de Fourier de l'ensemble $\phi(k)$.

Définissons la forme du paquet d'onde à $t = 0$. On définit $\phi(k)$ comme une distribution gaussienne, comme définie en figure 6. On peut distinguer 3 ondes dans ce paquet :

- k_0 , d'amplitude 1 ;
- $k_0 + \Delta k$, d'amplitude $\frac{1}{2}$;
- $k_0 - \Delta k$, d'amplitude $\frac{1}{2}$.

Donc, à $t = 0$:

$$\phi(x, 0) = \frac{\phi(k)}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{i(kx - \omega \times 0)} + \frac{1}{2} e^{i(k_0 + \Delta k)x - \omega \times 0} + \frac{1}{2} e^{i(k_0 - \Delta k)x - \omega \times 0} \right]$$

Ce qui, après simplification, nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\phi(k)}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_0 x} \left[1 + \frac{1}{2} e^{-i\Delta k x} + \frac{1}{2} e^{i\Delta k x} \right] \\ \frac{\phi(k)}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} [1 + \cos \Delta k x] \end{aligned} \quad (15)$$

Or, lorsque ψ est maximal, $x = 0$ (les 3 ondes sont en phase). De plus lorsque $\psi = 0$, cela signifie que les ondes formant le paquet sont déphasées de π . Enfin, on peut également déduire que $\psi(x)$ s'annule aux points $x_0 = \Delta x$ tels que $\Delta k x_0 = \Delta k \Delta x = \pi$.

Ces dernières équations définissent la forme du paquet d'onde.

II.8.2 Principe d'incertitude de Heisenberg

La définition précédente du paquet d'onde mène à un paradoxe : si le paquet d'onde contient toute l'information sur la particule, la totalité de cette information n'est pas accessible ! En effet, nous savons que $p = \hbar k$. Il en découle que :

$$\Delta p \Delta x = \pi \hbar \quad (16)$$

Cette relation porte le nom de *principe d'incertitude de Heisenberg*, et met en avant le fait que l'on ne peut pas mesurer simultanément p et x avec précision. Il faut alors faire des compromis.

Quelques applications

Le but ici est de mettre en pratique le principe d'incertitude de Heisenberg, afin de bien se rendre compte de l'importance qu'il a dans le monde quantique.

Nous allons donc calculer successivement l'incertitude sur la position d'une voiture, puis d'un électron. La voiture a une masse de 1500 kg, et roule à 100 km/h, à +/- 10 km/h près. On peut donc calculer l'incertitude sur sa position :

$$\Delta x m \Delta v = \frac{\hbar}{2} \text{ (car } p = mv), \text{ et avec } \Delta v = 10 \text{ km.h}^{-1} = 2,78 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\Delta x = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{1500 \times 2,78} = 1,6 \cdot 10^{-37} \text{ m}$$

Ici, on peut sans problème considérer que l'on sait exactement où est la voiture (à 10^{-37} mètres près !). Effectuons à présent le même calcul pour un électron, dont la vitesse est connue à 1 m.s⁻¹ près.

La 4^{ème} relation d'incertitude

Depuis les travaux d'Einstein, la mise en place d'une quatrième dimension – le temps – est devenue courante parmi les physiciens. Le principe d'incertitude que nous avons vu précédemment relie impulsion (p) et position (x),

Troisième partie

Annexes

III.1 Table des niveaux d'énergie

Bibliographie