

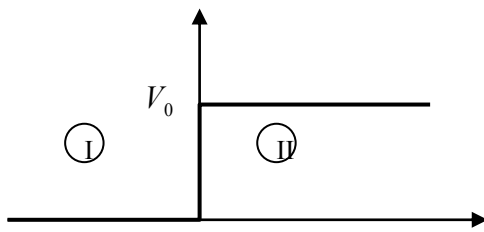
LP 61 Effet tunnel. Applications

Introduction: nous allons ici étudier un des effets de mécanique quantique qui va à l'encontre de la mécanique classique : l'effet tunnel. Cet effet est très important, et on ne peut en surestimer l'importance dans les applications de la mécanique quantique à diverses situations physiques.

Par essence, cet effet traduit la possibilité pour des particules de pénétrer dans des zones classiquement interdites. Nous allons tout d'abord étudier la marche de potentiel, afin de dégager la physique de l'effet tunnel sans qu'elle soit noyée par le formalisme, puis l'effet tunnel en tant que tel. Nous présenterons enfin quelques applications.

A) L'effet tunnel.

1) Préliminaire : la marche de potentiel:



Considérons une particule dans un potentiel type marche de potentiel, c'est-à-dire $V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$.

Nous nous intéresserons ici qu'au cas où l'énergie de la particule émise depuis $-\infty$ vérifie $0 < E < V_0$, c'est-à-dire que classiquement la particule rebondit sur la marche et repart dans l'autre sens.

L'équation de Schrödinger s'écrit, quelque soit la région:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \text{ soit } \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - V)\psi(x) = 0$$

On introduit alors les constantes $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et $\rho_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$

Et la solution s'écrit:

$$\psi_I(x) = A_1 e^{ik_1 x} + A'_1 e^{-ik_1 x}$$

$$\psi_{II}(x) = B_2 e^{\rho_2 x} + B'_2 e^{-\rho_2 x}$$

Le coefficient A_1 traduit l'existence d'ondes se propageant dans le sens des x croissants, le coefficient A'_1 traduit l'existence d'une onde réfléchie dans la zone 1, et comme il faut que la fonction d'onde reste bornée à l'infini, on doit prendre $B_2 = 0$.

Si on écrit la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = 0$, on obtient:

$$A_1 + A'_1 = B_2$$

$$ik_1 A_1 - ik_1 A'_1 = \rho_2 B'_2$$

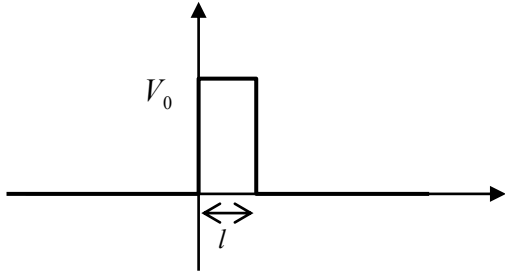
On obtient alors $\frac{A'_1}{A_1} = \frac{k_1 - i\rho_2}{k_1 + i\rho_2}$ et $\frac{B'_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + i\rho_2}$.

On définit alors un coefficient de réflexion $R = \left| \frac{A'_1}{A_1} \right| = 1$. Comme en mécanique classique,

la particule est totalement réfléchie. Cependant, il subsiste une différence fondamentale. Du fait de l'existence de l'onde évanescence $e^{-\rho_2 x}$, la particule a une probabilité de présence non nulle dans la région de l'espace qui classiquement, lui est interdite. Cette probabilité décroît exponentiellement en x et devient négligeable à une épaisseur caractéristique

$\frac{1}{\rho_2} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}}$, et on remarque que, conformément à l'intuition, cette épaisseur devient nulle dans le cas classique ($\hbar = 0$) et qu'elle devient infinie lorsque $E \rightarrow V_0$, où on rejoint également le cas classique. C'est cette probabilité de présence et sa longueur caractéristique qui vont expliquer physiquement l'effet tunnel.

2) Effet tunnel:



On considère à présent une barrière de potentiel, toujours de hauteur V_0 et d'épaisseur l . Nous nous limiterons toujours au cas où $0 < E < V_0$, cas où la physique classique interdit à la particule de franchir la barrière.

Dans ce cas, il y a probabilité de transmission non nulle, contrairement aux prévisions classiques. En effet, au regard des résultats sur la marche de potentiel (qui est ce qu'une particule venant de $-\infty$ voit en premier lieu), on voit qu'il suffit que la longueur l soit inférieure à ρ_B^{-1} pour que la zone où la densité de probabilité prend des valeurs notables s'étendent jusqu'à l'autre extrémité de la barrière et qu'elle s'étende alors jusqu'à l'infini. Il s'agit en fait d'un phénomène analogue au phénomène de réflexion totale frustrée dans le cas de la réflexion d'une onde électromagnétique sur une feuille métallique d'épaisseur inférieure à l'épaisseur de peau déjà rencontrée en électromagnétisme.

Cet argument mérite tout de même d'être précisé.

Ecrivons alors les solutions de l'équation de Schrödinger aux états stationnaires. On trouve immédiatement:

$$\psi_I(x) = A_1 e^{ik_1 x} + A'_1 e^{-ik_1 x}$$

$$\psi_I(x) = B_2 e^{\rho_2 x} + B'_2 e^{-\rho_2 x}, \text{ toujours avec } k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ et } \rho_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}. \text{ Ici on ne}$$

$$\psi_I(x) = A_3 e^{ik_1 x} + A'_3 e^{-ik_1 x}$$

peut pas annuler a priori B_2 , puisque une réflexion en $x=l$ est possible, mais par contre, en considérant qu'il n'y a pas de dispositif réflecteur à l'infini, on peut écrire $A'_3 = 0$. Les conditions de raccordement en $x=0$ et en $x=l$ donnent les coefficients en fonction par exemple de A_3 , et on en tire les coefficients de réflexion et de transmission pour la barrière:

$$R = \left| \frac{A'_1}{A_1} \right|^2 = \frac{(k_1^2 + \rho_2^2)^2 \sinh^2 \rho_2 l}{4k_1^2 \rho_2^2 + (k_1^2 + \rho_2^2)^2 \sinh^2 \rho_2 l} = \frac{V_0^2 \sinh^2 \rho_2 l}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2 \rho_2 l}$$

$$T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \frac{4k_1^2 \rho_2^2}{4k_1^2 \rho_2^2 + (k_1^2 + \rho_2^2)^2 \sinh^2 \rho_2 l} = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2 \rho_2 l}$$

Dans le cas d'une barrière épaisse, on a $\rho_2 l \gg 1$.

On a à ce moment là $\sinh^2 \rho_2 l = \frac{e^{2\rho_2 l}}{4}$ et $4E(V_0 - E) \ll V_0^2 \sinh^2 \rho_2 l$.

Le coefficient de transmission s'écrit alors:

$$T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\rho_2 l}$$

On voit alors que la probabilité décroît de manière exponentielle lorsque l augmente ou que $(\rho_2)^{-1}$ diminue.

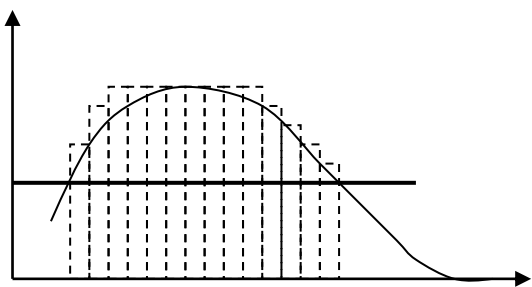
On peut alors donner quelques ordres de grandeur:

- considérons un électron d'énergie 1eV et une barrière d'énergie 2eV et de largeur $1 \text{ \AA}$. La longueur caractéristique de pénétration vaut alors $1,96 \text{ \AA}$. La formule donne alors $T = 0,78$, ce qui indique que l'électron a 80% de chances de franchir la barrière par effet tunnel.
- Pour un proton, de masse 1840 fois plus grande, la longueur de pénétration vaut $4,5610^{-2} \text{ \AA}$, ce qui signifie qu'avec la même barrière le proton a beaucoup moins de chance de passer. En effet ici $T = 4.10^{-19}$
- Enfin, au niveau macroscopique on peut se demander quelle est la probabilité pour qu'un cycliste de 70kg arrivant à 36km/h sur une colline abrupte de 20m de haut et 50m de large. On a alors $V_0 = mgz = 14\text{kJ}$ et $E = 3,5\text{kJ}$. La longueur de pénétration du paquet d'onde associé au cycliste vaut alors $8,210^{-38}\text{m}$ et donc le coefficient de transmission vaut alors: $e^{-\rho_2 l} = e^{-6.10^{38}} \lllll 1$. La petitesse de la constante de Planck rend cet effet inexistant au niveau microscopique. On ne doit donc pas essayer de traverser un mur par effet tunnel!

3) Barrière de forme quelconque:

A l'issue de ces résultats, on peut écrire que $\ln T = -2\rho_1 l + \ln \frac{16E(E - V_0)}{V_0^2}$. On peut utiliser, toujours dans le cas $\rho_1 l \gg 1$, la formule approchée $\ln T = -2\rho_1 l$.

Cette remarque va nous permettre de déterminer le coefficient de transmission d'une barrière épaisse de forme quelconque.



Prenons donc une barrière de forme quelconque et découpons la en tranche rectangulaire d'épaisseur dx , suffisamment épaisses pour que l'approximation précédente soit valable. La probabilité pour que la particule soit en $x+dx$ est la probabilité pour qu'elle soit en x multipliée par la probabilité de transmission

à travers une bande soit: $P(x+dx) = T(x)P(x) = P(x)e^{-2\rho_1 l}$. On aboutit alors à l'équation différentielle $\frac{dP(x)}{dx} = -2\rho_2(x)lP(x)$. Le coefficient de transmission pour l'ensemble s'écrit alors:

$$T = \frac{P(x_2)}{P(x_1)} = \exp\left(-2\int_{x_1}^{x_2} \rho_2(x)l\right) = \exp\left(-2\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{2m(V(x)-E)}}{\hbar} l\right).$$
 Cette formule a de

nombreuses applications dans l'étude de cas théoriques, comme nous le verrons plus tard. Cependant, avant de regarder les applications de l'effet tunnel, regardons le résultat obtenu.

Celui-ci se met sous la forme $T = e^{-\frac{A}{\hbar}}$, où il est clair que A désigne une grandeur d'action caractéristique. On constate ici un résultat qui délimite les bornes où l'on peut appliquer les résultats de la mécanique classique: celle-ci donnera de bons résultats (dans le cas qui nous intéresse $T \ll \ll 1$) si $A \gg \hbar$, c'est-à-dire si *l'action caractéristique du problème étudié est bien supérieure à $\hbar$* . On constate également le rôle fondamental que joue la constante de Planck, et en particulier sa petitesse.

B) Applications:

1) Radioactivité α .

L'explication de la radioactivité α constitua un succès historique majeur pour la mécanique quantique dont il constitua la première application au noyau atomique. Le phénomène de la radioactivité α est l'émission de particules α par un noyau, avec des énergies inférieures à la barrière du potentiel qui les retient en principe dans ce noyau.

On modélise le potentiel à franchir par la fonction $V(r) = \begin{cases} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = \frac{K}{r} & r > r_0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$, inspiré de

l'interaction coulombienne d'un noyau à Z_2 protons et d'une particule à Z_1 protons (par exemple $92-2=90$ pour l'uranium et 2 pour une particule α).

En appliquant alors la loi établie précédemment pour un potentiel de ce type, on obtient que $\ln T = -2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\sqrt{2m(V(r)-E)}}{\hbar} dr = \frac{4\sqrt{K}}{\hbar} (2mr_0) - \frac{K\pi\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{E}} = a + \frac{b}{\sqrt{E}}$, qui est la loi Gamow-Condon-Gurney, qui lie la durée de vie d'un noyau radioactif α , liée à l'inverse de T , à l'énergie E des particules α qu'il émet, cette formule corroborant bien les résultats expérimentaux. On retiendra surtout que l'émission α procède avant tout de l'effet tunnel.

