

Mécanique Quantique

Programme : Histoire des Sciences

I Mise en évidence de phénomènes quantiques

lumière, matière puis quantification de l'énergie de l'état

II Concepts de la MQ

fonct d'onde, incertitudes, équation de Schrödinger

III Applicat° des concepts

mécanique ondulatoire, puits de potentiel, barrière de potentiel $\rightarrow$ effet tunnel

IV Systèmes à 2 niveaux (d'énergie)

quantificat° du moment cinétique, spin de l'électron, laser, IRM, MRAM

ondes et particules : 2 entités $\neq$

impulsion : $p = m v$

A.N. : spectre de l'hydrogène :

$\lambda_{3 \rightarrow 2} = 656 \text{ nm}$: rouge

puissance rayonnée par unité de surface $\propto T^4$

spectre du corps noir (classique) : $R(\lambda) \propto \frac{T}{\lambda^4}$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} R(\lambda) = +\infty$$

spectre du corps noir "quantique" : $R(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^5} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda T}\right) - 1}$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda^5 \left(\exp\left(\frac{1}{\lambda}\right) - 1 \right)} = 0$$

$\Rightarrow$ prédomine l'ordre des croissances dominées par e^x

Observation :

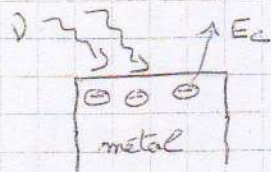
① : les UV arrachent des e^- au métal

② : nb e^- arrachés $\propto I_{\text{lumière}}$

③ : $F_c(e^-) = \frac{1}{2} m_e v^2$ indépendante de $I_{\text{lumière}}$

④ $E_c(e^-) \nearrow$ qd $\nu_{lumière} \nearrow$ (càd $\lambda \searrow$)

⑤ effet de seuil: potentiel d'arrêt V_0 pour l'effet photoélectrique



échec de la théorie ondulatoire

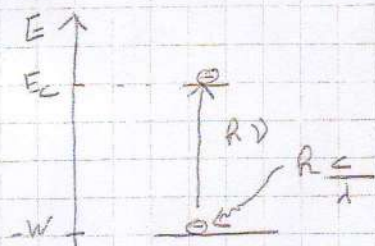
$\rightarrow$ fréq seuil pour l'onde e.m.

$\rightarrow$ potentiel d'arrêt V_0 indépendant de $I_{lumière}$

Explication quantique (Einstein)

résultats théo: on envoie quantum d'énergie $h\nu$ sur e^-

collision photon/ e^- mécanique



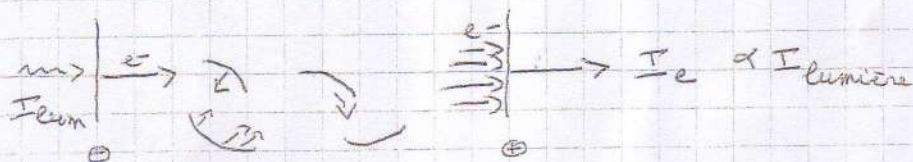
$$h\nu = E_c + W$$

$$h\nu = \frac{1}{2} m_e v^2 + W \quad \rightarrow \text{travail d'extraction}$$

effet de seuil V_0 : $\bullet$ à basse fréquence $\nu_1 < \nu_0 \Rightarrow$ pas d' e^- extrait

$\bullet$ à haute fréquence $\nu_2 > \nu_0 \Rightarrow e^-$ extrait avec $E_c = h\nu - W$

photomultiplicateur:



Effet photo-électrique

mesure de h : $eV_0 = \frac{1}{2} m_e v^2$ et $\frac{1}{2} m_e v^2 = h\nu - W \Rightarrow eV_0 = h\nu - W$

$$V_0 = \frac{h}{e} \nu - \frac{W}{e} \quad (y = a\nu + b)$$

$\rightarrow$ pente: $\frac{h}{e}$

ex: quelle est l'énergie d'un photon si $\lambda = 400 \text{ nm}$

" " en eV

$\lambda = 700 \text{ nm}$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$\hookrightarrow \text{en J}$

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$1e \times V = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda e}$$

$\downarrow$
eV

$$E_{400 \text{ nm}} = 3,1 \text{ eV (violet)}$$

$$E_{700 \text{ nm}} = 1,77 \text{ eV (rouge)}$$

- Intensité moyenne de la lumière solaire à la surface de la Terre est 1400 W/m^2 (environ). Si l'énergie moy d'un photo est 2 eV ($\hookrightarrow 600 \text{ nm}$).
Calculer nb photons qui frappent une surface de 1 cm^2 à chaque seconde.

A chaque seconde, l'énergie des photons solaires:

$$E = \text{puissance} \times 1 \text{ s} = 1400 \times 1 = 1400 \text{ J/m}^2 = 0,14 \text{ J/cm}^2$$

$$N \text{ photons/cm}^2 \times 2 \text{ eV} = 0,14 \text{ J/cm}^2$$

$$\hookrightarrow 3,2 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$N \text{ photons/cm}^2 = \frac{0,14}{3,2 \times 10^{-19}} = 4,38 \times 10^{17}$$

- λ_{max} pour observer l'effet photoélectrique est 564 nm pour le potassium.

Calculer le travail d'extraction W .

On utilise une lumière monochromatique $\lambda = 400 \text{ nm}$. Déterminer E_c^{max} des

e^- et v^{max} .

Au seuil photoélectrique $h\nu_0 = W$ car $E_c = 0$

$$W = \frac{hc}{\lambda_{\text{max}} e} = 2,20 \text{ eV}$$

$$\lambda = 400 \text{ nm} < \lambda_{\text{max}} \Rightarrow \text{effet photoélectrique}$$

$$\frac{hc}{\lambda e} = E_c + W \Rightarrow E_c = \frac{hc}{\lambda e} - W = 3,106 - 2,20 = 0,906 \text{ eV}$$

$$\text{vitesse de l}'e^- \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \quad (E_c \text{ en J}) \quad v = \left(\frac{2 \times 0,906 \times 1,6 \times 10^{-19}}{9,1 \times 10^{-31}} \right)^{-1/2}$$

$$= 5,64 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

lumière (particule): photon

fréquence ν

longueur d'onde λ

vitesse c

énergie $h\nu$

impulsion $p = \frac{E}{c}$ (relativité)

lumière (onde): em

fréq ν

puissance $P = \frac{N h \nu}{\Delta t}$

nb de photons qui frappent une surface unité pdt Δt

ordre de grandeur de $\lambda = \frac{h}{h\nu}$

ex: goutte pluie $d = 2 \text{ mm}$ tombe à la vitesse $v = 10 \text{ m/s}$

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{m_{\text{eau}} v}$$

$$m_{\text{eau}} = \rho_{\text{eau}} \times V_{\text{goutte}} = \rho_{\text{eau}} \times \frac{4}{3} \times \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = 10^3 \times \frac{4\pi}{3} \times 10^{-9} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

$$\lambda_{DB} = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{4 \times 10^{-6} \times 10} = \frac{3}{4} \times 10^{-29} \text{ m} = 1,5 \times 10^{-19} \text{ Å} \quad 1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$$

→ pas de sens phy

e^- d'un tube cathodique de TV accélérés avec $V = 220 \text{ V} \Rightarrow E_c = 220 \text{ eV}$

$$\lambda_{DB}(e^-) = \frac{h}{m v} \quad v = \frac{\sqrt{2 E_c}}{\sqrt{m}}$$

$$\lambda_{DB}(e^-) = \frac{h}{m} \frac{m^{1/2}}{\sqrt{2 E_c}} = \frac{h}{\sqrt{2 m E_c}}$$

$$\lambda_{DB}(e^-) = 1,23 \times \frac{1}{\sqrt{E_c}} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{nm} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \sqrt{E_c} \\ \text{eV} \end{matrix}$$

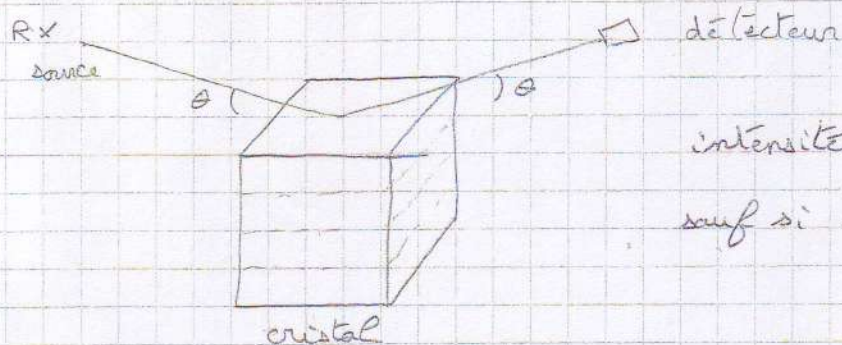
$$\text{pour l}'e^-, \lambda_{DB} = \frac{1,23}{\sqrt{V}} = 0,083 \text{ nm}$$

$$\lambda_{DB} = 83 \text{ pm}$$

Les e^- diffusés par un cristal sont réfléchis selon des directions privilégiées
 $\Rightarrow$ comportement ondulatoire

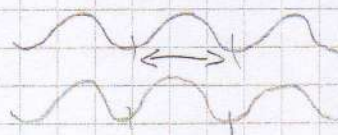
↑ tension $\Rightarrow \searrow \lambda$

Diffraction de Bragg avec Rayon X



intensité des ondes réfléchies faible
sauf si elles sont en phase.

interférences constructives :



$$2d \sin \theta = n \lambda$$

e^- se comportent comme des ondes en utilisant Bragg + λ de Broglie

$$\frac{n}{2d \sin \theta} = \frac{1}{\lambda}$$

$$p = m v = \sqrt{2 m E_c} = \sqrt{2 m e V} \quad \rightarrow \text{potentiel d'accélération}$$

dipôle oscillant $\Rightarrow$ rayonnement ondes e^-

conservation de l'énergie

Énergie rayonnée compensée par perte de vitesse de l' e^-

$\Rightarrow 1^{re}$ orbite $\Rightarrow$ atome instable !?

durée de vie estimée : 10^{-8} s

Modèle atomique de Bohr

Postulats :

- e^- circule à vitesse et énergie ctes sur orbites stables pour lesquelles forces centrifuge et électrostatique se compensent

② Sur ces orbites, ^{moment} cinétique orbital quantifié

$$L = m \vec{v} \wedge \vec{r} = n \frac{h}{2\pi} \quad n \text{ entier}$$

③ changement d'orbite par absorption / émission d'énergie

$$|E_f - E_i| = n \cdot V$$

Rayons et énergies permis pour les orbites de Bohr (modèle semi-classique)

Equilibre des forces: $\begin{cases} \text{centrifuge: } F_c = \frac{m v^2}{r} \\ \text{électrostatique: } F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \end{cases}$

$$F_c = F_e \Leftrightarrow \frac{m v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

moment cinétique: $L = m v r = n \frac{h}{2\pi} \rightarrow v = \frac{n h}{2\pi m r}$

$$\frac{m}{r} \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m^2 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

$$\frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m r} = \frac{e^2}{\epsilon_0}$$

$$\text{d'où } r_n = \frac{h^2 \epsilon_0}{4\pi^2 m e^2} n^2 = r_0 n^2$$

r_0 = rayon de Bohr

$$= 52,9 \text{ pm} = 52,9 \times 10^{-12} \text{ m}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} \quad \text{or } p = \frac{n h}{2\pi r}$$

$$\bullet E_c = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m r^2} = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

$$\bullet V = \int_0^{\infty} F_e(r) dr = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} r^{-2} dr = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$= -\frac{m e^4}{4 \epsilon_0^2 h^2 n^2} = -2 E_c$$

$$E_n = E_c - 2 E_c = -E_c = -\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$$

1 état fondamental, des états excités

Spectroscopie atomiques (raies spectrales)

$$\Delta E = |E_f - E_i| = R V = R \frac{c}{\lambda} = E_0 \left| \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right|$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hc} \left| \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right| = R = 1,09 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

concepts de QM

fct d'onde, proba de présence, eq de Schrödinger, principe de superposition, principe de correspondance - observables, principe d'incertitude (Heisenberg), paquet d'ondes, principe de décomposition spectrale (paradoxe du chat de Schrödinger)

Fonction d'onde

particule décrite par fct périodique

$$f(x + m\lambda) \quad m \text{ entier}$$

λ : longueur d'onde



onde plane: $\psi(x) = A e^{ibx}$

$$e^{ibx} = \cos(bx) + i \sin(bx)$$

A: amplitude de l'onde stationnaire
b: nb d'ondes $b = \frac{2\pi}{\lambda}$ $[b] = L^{-1}$

onde en mov: déplacement de l'onde $\hat{=}$ la vitesse v .

Il faut le tps T (période) pour $\text{dplm}^t = \lambda$.

$$T = \frac{\lambda}{v}$$

$$\text{freq de l'onde: } \nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$$

cercle unite $\left. \begin{array}{l} \text{circonférence } 2\pi \text{ unités de temps} \\ 1 \lambda \text{ parcouru en } T \text{ unités de temps} \end{array} \right\} 1 \text{ u de tps} = \frac{2\pi}{T}$

$\frac{2\pi}{T}$: nb de cycles parcourus pdt le tps t

$$\text{pulsation } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu$$

L'onde se déplace $\Leftrightarrow$ coordonnée x qui se déplace

$$x' = x + vt$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu = \frac{2\pi}{b} \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{b}$$

Vitesse de phase de l'onde: $v = \frac{\omega}{b}$

Onde propagative: $\hbar \omega = \hbar v k$

$$\Rightarrow \Psi(x, t) = A \exp(i(kx - \omega t))$$

convention: propagation $x > 0$ et $t \nearrow$

$$\Psi(x, t) = A \exp(i(kx - \omega t))$$

Ψ contient l'info concernant la particule

$$\left. \begin{array}{l} \hbar = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda = \frac{\hbar}{p} \end{array} \right\} \hbar = \frac{2\pi \hbar}{\lambda} \Rightarrow p = \frac{\hbar \hbar}{2\pi} = \hbar k$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 2\pi \nu \\ E = \hbar \nu \end{array} \right\} \omega = \frac{2\pi E}{\hbar} \Rightarrow E = \hbar \omega$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,054 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

$$\Rightarrow \Psi(x, t) = A \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right]$$

sens phys de la fonction d'onde?

$$\Psi_{\text{out}} = \Psi_A + \Psi_B$$

$$\begin{array}{l} \text{ondes em} \quad \vec{E}(x) = E_A + E_B \\ \propto |E|^2 \end{array}$$

ondes MQ: Ψ_{out} amplitude de proba

$|\Psi_{\text{out}}|^2 = \text{densité de proba de présence}$

$$|\Psi|^2 = A^* e^{-i(kx - \omega t)} \times A e^{i(kx - \omega t)}$$

$$= |\Psi^* \Psi| = |A^* A| \times \frac{e^0}{1} = |A|^2 \in \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ complexe conjugué de Ψ

Proba de présence

$|\Psi(x, t)|^2$ relié à proba élémentaire de "trouver" la particule ds le volume dV

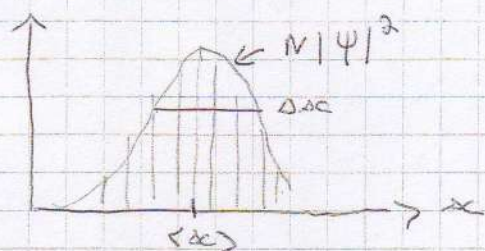
$$dV = dx \times dy \times dz \rightarrow dP = |\Psi(x, t)|^2 dV$$

$$\text{Intégration sur tt l'espace } P = \int_V |\Psi|^2 dV = 1$$

Bausc 2 et 3 juin 15 min / épreuve

N mesures de positions

Effectifs



$\langle x \rangle$ valeur attendue

$$\langle x \rangle = \int x |\Psi(x,t)|^2 dx$$

$$\Delta x \text{ tq } (\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

Fonction d'onde $\Leftrightarrow$ état de la particule

$$\Psi(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad A \in \mathbb{C}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{E}{\hbar} \quad \lambda = \frac{c}{\nu}$$

signification physique: Ψ : densité de proba

$|\Psi(x,t)|^2$: densité de proba de présence de la particule

L'équation de Schrödinger

évolution de $\Psi(x,t)$

remplace le principe fondamental de la dynamique

* dérivée par rapport à t

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = -i A \omega e^{i(kx - \omega t)} = -i \omega \Psi(x,t) = -i \frac{E}{\hbar} \Psi(x,t)$$

$\hookrightarrow$ dérivée partielle par rapport à t

équation aux valeurs propres: $+i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = E \Psi(x,t)$

$\hookrightarrow$ opérateur énergie

$\hookrightarrow$ scalaire $E \in \mathbb{R}$

* dérivée par rapport à x

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x,t) = i A k e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x,t) \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(i A k e^{i(kx - \omega t)} \right)$$

$$= i^2 A k^2 e^{i(kx - \omega t)} = -k^2 \Psi(x,t)$$

Particule libre.

$$E = E_c = \frac{p^2}{2m} \text{ avec } p = mv$$

$$p^2 = 2mE \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(x,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) = E \Psi(x,t) : \text{eq aux valeurs propres}$$

↪ opérateur $\frac{\hat{p}^2}{2m}$

Equation de Schrödinger (particule libre)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) \quad \text{solu}^o : \Psi(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)}$$

Particule soumise au potentiel $V(x)$

$$\text{opérateur } \left(\frac{p^2}{2m} + V \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) + V \Psi(x,t) = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t)$$

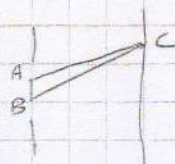
$$\text{opérateur } \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) : \text{hamiltonien } \hat{H}$$

Principe de superposition : $\Psi = \alpha \Psi_1 + \beta \Psi_2$

Les fct d'onde peuvent s'ajouter $\Rightarrow$ interférences

Ψ_C : amplitud de l'onde au pt C

$$\Psi_C = \Psi_A + \Psi_B$$



Soit ψ_1 et ψ_2 , 2 fct d'onde quelconques

$\Psi = \alpha \psi_1 + \beta \psi_2$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ est aussi une fct d'onde

$$\hookrightarrow \alpha e^{i\varphi_1} \hookrightarrow \alpha e^{i\varphi_2}$$

conséquence : $\{ \psi(x,t) \}$ ensemble des fct d'onde
est un espace vectoriel complexe

+ condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

$\Rightarrow \{ \psi(x,t) \}$ espace de fonctions de carré sommable

espace de Hilbert

compatible avec Schrödinger : tte combi linéaire de solution
d'une équ diff est aussi solution

Principe de correspondance

1 mesure $\Rightarrow$ résultat aléatoire.

A chaque grandeur phy, on fait correspondre un opérateur.

Un opérateur décrit une q'té phy observable

position: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \hat{r} \psi = \vec{r} \psi$ en 1D $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \hat{r} \psi = x \psi$

impulsion: $\vec{p} = m \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \longrightarrow \hat{p} \psi = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi$ ^{en 1D} $\hat{p} \psi = \hbar k \psi$

énergie: $E \longrightarrow \hat{E} \psi = -i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hbar \omega \psi$

hamiltonien: $E_c + V \longrightarrow \hat{H} \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \psi = \left(\frac{p^2}{2m} + V \right) \psi$

Propriétés des opérateurs ou observables

opérateur $\hat{A}$ linéaire

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \hat{A} \psi_1 = \phi_1 \\ \text{et } \hat{A} \psi_2 = \phi_2 \end{array} \right\} \text{ alors } \hat{A}(c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = \hat{A} c_1 \psi_1 + \hat{A} c_2 \psi_2 = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2$$

$\hat{A}$ opérateur hamiltonien hermitien

$$\int \psi_1^* (\hat{A} \psi_2) dx = \int (\hat{A} \psi_1)^* \psi_2 dx$$

$\Rightarrow$ valeur attendue de l'observable

$$\langle A \rangle = \int \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dx \in \mathbb{R}$$

et val propres de $\hat{A}$ sont réelles.

$$\hat{A} \psi_{a_n} = a_n \psi_{a_n}$$

$\hat{A}$ décrit une q'té observable en tte circonstance. On doit pouvoir prédire les résultats d'une mesure de A . Les fct propres de $\hat{A}$ forment une base de l'ensemble $\{\psi(x,t)\}$.

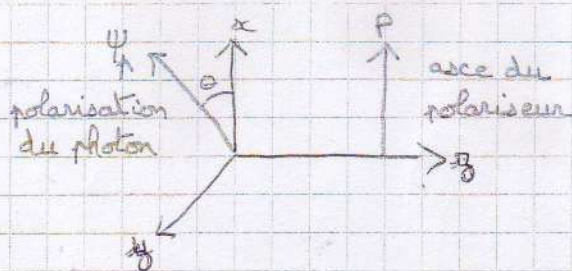
$$\psi(x,t) = \sum_n c_{a_n}(t) \psi_{a_n}(x)$$

$\searrow$ ampli de proba

$$|c_{a_n}(t)|^2 \rightarrow \text{proba d'obtenir le résultat } a_n$$

$\hookrightarrow$ val propre

Principe de décomposition spectrale : mesure



expérience : source de photons uniques
polariseur

polariseur : 2 résultats $\begin{cases} \rightarrow \text{photon passé (1)} \\ \rightarrow \text{photon bloqué (0)} \end{cases}$ $\leftarrow$ valeurs propres

quantification du résultat de la mesure

$\hat{A}$ chaque valeur propre correspond 1 état propre $\begin{cases} |1\rangle \rightarrow \vec{e}_x \\ |0\rangle \rightarrow \vec{e}_y \end{cases}$

Si $\vec{\Psi}_\uparrow = \vec{e}_x$ alors proba 100% photon passé
 — $\vec{\Psi}_\uparrow = \vec{e}_y$ ————— photon bloqué

$\vec{\Psi}_\uparrow$ quelconque

décomposition sur les états propres du polariseur

$$\vec{\Psi}_\uparrow = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

proba photon passé: $|\cos \theta|^2$

————— bloqué: $|\sin \theta|^2$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow \vec{\Psi}_\uparrow \text{ normé}$$

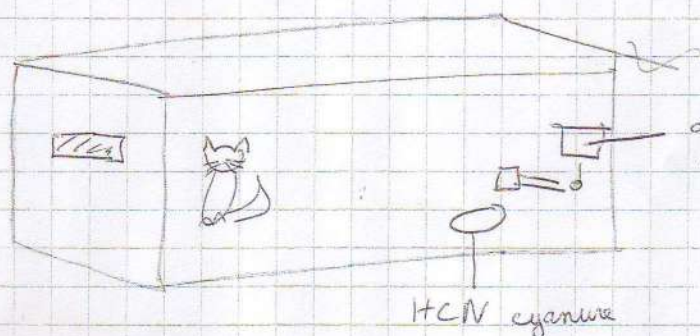
conséquence fondamentale: la mesure perturbe le système

$\vec{\Psi}_\uparrow$ avant $\xrightarrow{\text{mesure}} \vec{e}_x$ après photon passé

On peut préparer l'état du syst

Paradoxe du chat de Schrödinger

Expérience de pensée



atome à $t = 1h$: proba: 1/2 désintègre / intègre

$$\Psi(\text{atome}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{\text{intègre}} + \Psi_{\text{désintègré}})$$

observation à $t = 1h$: le chat est mort, qui est le coupable?

marteau + HCN: syst passif

le syst est quantique

$$\Psi_{\text{chat}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{\text{vivant}} + \Psi_{\text{mort}}) \Rightarrow \text{l'observateur tue le chat}$$

Représentation réaliste d'une particule

paquet d'ondes et principe d'incertitude de Heisenberg.

Onde plane (De Broglie) avec $\lambda = \frac{h}{mv}$ n'est pas une fct de carré sommable $\int |\psi|^2 dx \neq 1$

occuper tt l'espace n'a pas de sens physique

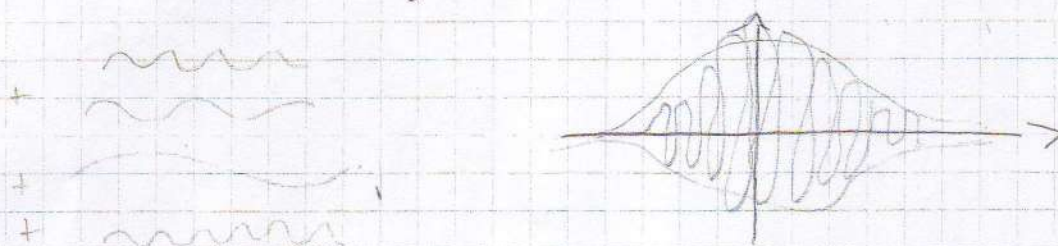


onde physique : | localisé dans l'espace à 1 instant donné

| localisé dans le temps à 1 endroit donné

paquet d'ondes $\rightarrow$ superposition linéaire d'ondes planes monochromatiques

$\Rightarrow$ interférences



cas statique $\rightarrow$ forme du paquet d'onde

cas dynamique $\rightarrow$ vitesse de d'plm^t

paquet d'ondes en 1D :
$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

cste $\downarrow$ de normalisat°

choisie tel que $\int |\psi|^2 dx = 1$

Forme du paquet d'ondes à $t=0$

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(k_0) e^{i k_0 x} dk$$

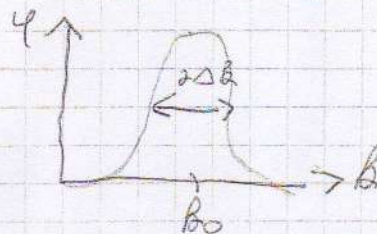
Soit $\varphi(k)$ courbe en cloche

On considère 1 paquet formé de 3 ondes

k_0 , amplitude 1

$k_0 + \Delta k$, — 1/2

$k_0 - \Delta k$, — 1/2

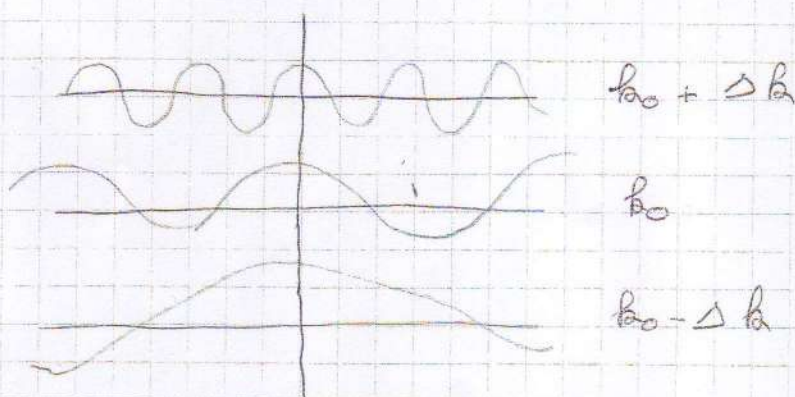


$$\begin{aligned}\psi(x,0) &= \frac{\psi(b_0)}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{i b_0 x} + \frac{1}{a} e^{i(b_0 + \Delta b)x} + \frac{1}{a} e^{i(b_0 - \Delta b)x} \right) \\ &= \frac{\psi(b_0)}{\sqrt{2\pi}} e^{i b_0 x} \left(1 + \frac{1}{a} e^{i \Delta b x} + \frac{1}{a} e^{-i \Delta b x} \right) \\ &= \frac{\psi(b_0)}{\sqrt{2\pi}} e^{i b_0 x} (1 + \cos(\Delta b x))\end{aligned}$$

$$\psi(x,0) \text{ max} \Leftrightarrow \cos(\Delta b x) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\Delta b x}_x \rightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\psi(x,0) = 0 \Leftrightarrow \text{interférences destructives}$$

$$\hookrightarrow \text{s'annule aux pts } x_0 = \pm \Delta x \text{ tq } \Delta b x_0 = \pi \Leftrightarrow \Delta b \Delta x = \pi$$



largeur du paquet

$$\Delta b \uparrow \Rightarrow \Delta x \downarrow$$

$$\Delta b \downarrow \Rightarrow \Delta x \uparrow$$

$$\psi(x,0) \longleftrightarrow \psi(b)$$



conséquence : principe d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta x \times \Delta p_x = \pi \hbar$$

$$\text{or } p_x = \hbar k$$

$$\Delta p_x = \hbar \Delta k$$

$$\Delta x \Delta p_x = \pi \hbar$$

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}$$

En MQ, on ne peut pas déterminer avec précision à la fois position et impulsion de la particule.

De façon rigoureuse, Heisenberg a montré

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ordre de grandeur

$$\Delta x \Delta p_x \approx h$$

• véhicule $m = 1500 \text{ kg}$

$$v = 100 \pm 10 \text{ km/h}$$

précision sur sa position ? $\Delta x = ?$

$$\Delta x \times m \Delta v_x \approx h$$

$$\Delta v_x = 10 \text{ km/h} = \frac{10\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} \approx 3 \text{ m/s}$$

$$\Delta x \approx \frac{h}{m \Delta v_x} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{15 \times 10^3 \times 3} \approx 10^{-37} \text{ m} \quad \text{pas de sens physique}$$

• e^- vitesse connue à 1 m/s près $\Rightarrow \Delta x = ?$

$$\Delta x \approx \frac{h}{m_e \Delta v_x} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 1} \approx 7 \times 10^{-4} \text{ m} \approx 10^6 \text{ fois la taille d'un atome}$$

• cas limite $\Delta p_x \rightarrow 0$

$\Rightarrow \Delta x \rightarrow \infty$ extension ∞ de l'onde 

Bonne approximation pour décrire un faisceau de particules dont la vitesse est bien connue.

La 4^{ème} relation d'incertitude $\Delta E \Delta t$

particule d'énergie cinétique $E_c = \frac{p^2}{2m}$

$$\frac{dE_c}{dp} = \frac{p}{m}$$

$$dE_c = \frac{p}{m} dp$$

$$\Delta E_c = \frac{p}{m} \Delta p$$

$$\text{Or } p_x = m v_x \quad \Delta E = v \Delta p_x$$

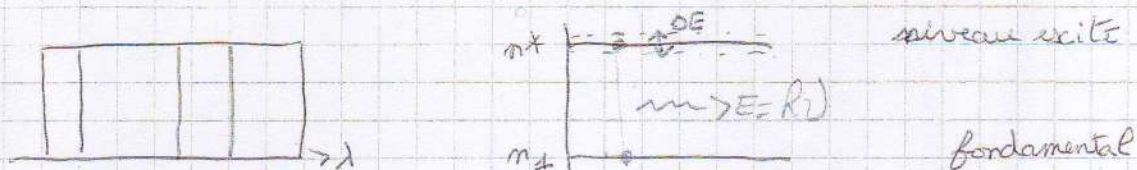
Par ailleurs, $\Delta x = v_x \Delta t$
 $\swarrow$ vitesse de la particule $\searrow$ durée de l'observation

$$\Delta E = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta p_x$$

$$\Delta E \Delta t = \Delta x \Delta p_x \Leftrightarrow \Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2}$$

Application concrète

largeur des raies spectrales, spectroscopie de H



niveau fondamental : énergie bien définie $\Rightarrow \Delta t \rightarrow \infty, \Delta E = 0$

niveau excité : durée de vie finie Δt finie

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{hc}{\Delta \lambda} \neq 0 \Rightarrow \Delta \lambda \neq 0$$

Déplacement du paquet d'onde

Une onde plane particulière du paquet se déplace à la vitesse de phase

$$v_{\varphi}(k) = \frac{\omega}{k}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Relation de dispersion : } E = \hbar \omega \\ E = \frac{p^2}{2m} \end{array} \right\} \hbar \omega = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \omega = \frac{p^2}{2m\hbar}$$

$$v_{\varphi}(k) = \frac{p^2}{2m\hbar k} \quad \text{car } p = \hbar k$$

$$v_{\varphi}(k) = \frac{p(k)}{2m} \Leftrightarrow p = mv \Rightarrow v_{\varphi}(k) = \frac{v(k)}{2}$$

milieu de propagation dispersif i.e. $v = f(k)$

superposition de 3 ondes avec phases $\neq$ ($\omega \neq$)

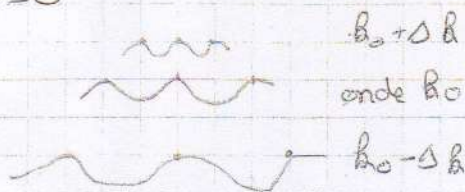
$$\begin{aligned} \psi(\Delta x, t) &= \frac{\psi(k_0)}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + \frac{1}{2} e^{i(k_0 + \Delta k)x - (\omega_0 + \Delta \omega)t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} e^{i(k_0 - \Delta k)x - (\omega_0 - \Delta \omega)t} \right) \\ &= \frac{\psi(k_0)}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \left(1 + \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) \right) \end{aligned}$$

Le max de $\psi(x, t)$, initialement à $x_0 = 0$ est maintenant à x_t

$$\text{tel que } \Delta k x_t - \Delta \omega t = 0 \quad x_t = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} t$$

Position des max

$\hat{A} t = 0$



À l'instant t :



Def: vitesse de groupe du paquet d'onde : $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$ $v_g \leq c$

Application des concepts : Problèmes stationnaires

$\hookrightarrow$ indépendants du temps

Trouver les énergies et fonctions d'onde stationnaires du problème.

Solut^o stationnaires de $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \Psi(x,t) = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$

Solut^o du type $\Psi(x,t) = \phi(x) e^{-i\omega t} = \phi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$

$\rightarrow$ dans Schrödinger

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} + V \phi(x) \right) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = i \hbar \times \left(-\frac{i}{\hbar} \right) E e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \phi(x) = E e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \phi(x)$$

équation de Schrödinger stationnaire: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \phi(x) = E \phi(x)$

$$\hat{H} \phi(x) = E \phi(x)$$

$\rightarrow$ couples $E_n, \phi_n(x)$

$$\hat{H} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{V(x)}_{\text{énergie potentielle}}$$

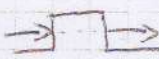
$(E_n \in \mathbb{R})$

Potentiel $V(x) = \text{cste}$

• solution de $\hat{H} \phi = E \phi$ avec $V = \text{cste}$

• puits de potentiel 

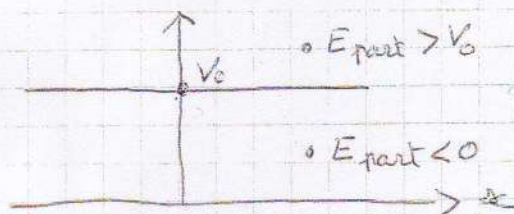
• marche de potentiel 

• barrière de potentiel $\Rightarrow$ 

effet tunnel

Particule soumise à $V(x) = \text{cte}$

$$V(x) = V_0 \quad \forall x$$



Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + V_0 \phi(x) = E \phi(x)$$

$$+\frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x) + (E - V_0) \phi(x) = 0 \quad \text{eq diff du 2nd degré à coeff ct}$$

solution sous la forme $e^{\lambda x} = \phi(x)$; $\lambda e^{\lambda x} = \phi'(x)$; $\lambda^2 e^{\lambda x} = \phi''(x)$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2 e^{\lambda x} + (E - V_0) e^{\lambda x} = 0$$

eq caractéristique : $\frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2 = V_0 - E$
(2nd degré en λ^2)

solution: $\lambda = \pm \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$ si $V_0 - E > 0$

$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$ si $V_0 - E < 0$

Fonctions d'onde:

si $E < V_0 \rightarrow \phi(x) = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}$ onde évanescente non propagative

si $E > V_0 \rightarrow \phi(x) = A e^{i\lambda x} + B e^{-i\lambda x}$ onde plane propagative
 $\lambda < 0$ $\lambda > 0$

Cas de la particule libre $V_0 = 0$

$$+\frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x) + E \phi(x) = 0$$

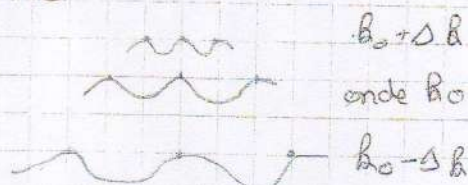
eq caractéristique: $\frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2 + E = 0$

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\phi(x) = A e^{i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x} + B e^{-i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x}$$

Position des max

À $t=0$



À l'instant t .



Def: vitesse de groupe du paquet d'onde : $v_g = \frac{dw}{dk} \Big|_{k=k_0}$ $v_g \leq c$

Application des concepts : problèmes stationnaires

$\rightarrow$ indépendants du tps

Trouver les énergies et fonctions d'onde stationnaires du problème.

Solut^o stationnaires de $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \psi(x,t) = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$

Solut^o du type $\psi(x,t) = \phi(x) e^{-i\omega t} = \phi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$

$\rightarrow$ dans Schrödinger

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} + V\phi(x) \right) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = i \hbar \times \left(-\frac{i}{\hbar} E \right) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \phi(x) = E e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \phi(x)$$

équation de Schrödinger stationnaire: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \phi(x) = E \phi(x)$

$$\hat{H} \phi(x) = E \phi(x)$$

$\rightarrow$ couples $E_n, \phi_n(x)$

$$\hat{H} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{V(x)}_{\text{énergie potentielle}}$$

Potentiel $V(x) = \text{cte}$

• solution de $\hat{H} \phi = E \phi$ avec $V = \text{cte}$

• puits de potentiel 

• marche de potentiel 

• barrière de potentiel 

effet tunnel

- System Quantique
- Sy - l Statismen.

III - 1 Problèmes Stationnaires

Etat Stationnaire $\Psi(x,t) = \phi(x) e^{-iEt/\hbar}$

(Equation de Schrödinger)

Résoudre $\hat{H}\phi(x) = E\phi(x)$

(Schrödinger Stationnaire) $\rightarrow$ Couples $E_n, \phi_n(x)$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{V(x)}_{\text{potentiel}}$$

Energie Cinétique

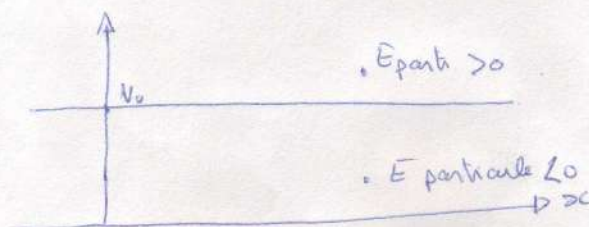
$$\frac{p^2}{2m}$$

Potentiel $V(x) = \text{cte}$

On va regarder les solutions de cette équation: $\hat{H}\phi = E\phi$ avec $V = \text{cte}$.

- puits de potentiel $\equiv E^2$
- Barrière de potentiel $\rightarrow$
- Barrière de potentiel $\rightarrow$ effet tunnel

e) particules soumises à $V(x) = \text{cte}$.



$$V(x) = V_0, \forall x$$

Equation Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + V_0 \phi(x) = E \phi(x)$$

(C'est une équ diff)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x) + \phi(x) (E - V_0) = 0$$

Equation diff de 2° degré à coeff Cst.

On en déduit l'énergie cinétique

$$h k = \sqrt{2mE} = p \text{ k impulsion.}$$

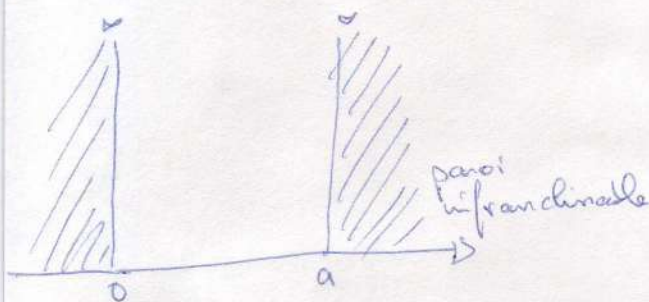
$$E = E_c = \frac{h^2 k^2}{2m}$$

$\leftarrow E_c$ peut prendre n'importe quelle valeur

Relation de De Broglie

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

4) Puits de potentiel



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0, a] \\ \infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Conditions limites imposées par la géométrie du puits.

$$\phi(x=0) = \phi(x=a) = 0, \text{ (données de l'exo.)}$$

Solutions $\phi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$ avec $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$$\phi(x=0) = 0 \Leftrightarrow A e^{i0} + B e^{-i0} = 0.$$

$$\Leftrightarrow A = -B$$

$$\begin{aligned} \cos(-n) &= \cos(n) \\ \sin(-n) &= -\sin(n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = A (e^{ikx} - e^{-ikx}) = A (\cos kx + i \sin kx - \cos(-kx) - i \sin(-kx))$$

$$= \underbrace{2iA}_{C} \sin(kx)$$

$$= C \sin kx \text{ avec } C \in i\mathbb{R}$$

$\phi(x=a) = 0$

$$A (e^{ika} - e^{-ika}) = 0$$

1° cl. (Condition limite)

$$\phi(x=a) = 0$$

$$\Leftrightarrow C \sin(ka) = 0$$

$$\Leftrightarrow ka = n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

(hg: Si $n=0$, alors $\phi(x)=0$)

h est quantifié: $k_n \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

$$\phi_n(x) = C \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

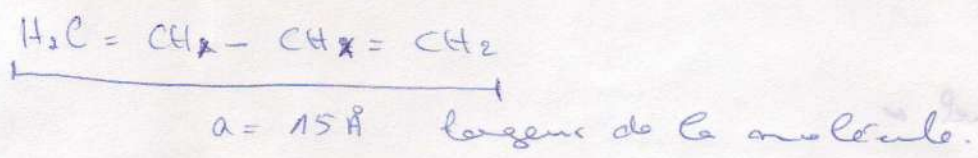
Energie dans le cas de l'e de valence du magnésium $a = 3.2 \text{ \AA} = 0.32 \text{ nm}$

$E_n = E_1 n^2$ avec $E_1 = \frac{h^2 \pi^2}{2m_e a^2}$ périphérique
 $= \frac{37.6}{a^2} \text{ eV}$

$E_1 = 3.64 \text{ eV}$

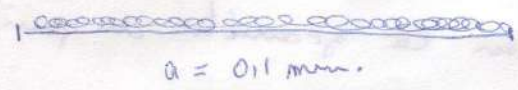
$E_2 = 2^2 E_1 = 4 E_1 = 14.7 \text{ eV}$ premier niveau excité. } $\Delta E \approx 11 \text{ eV}$

Même question: e de bitadiène.



$E_1 = \frac{37.6}{15^2} = 0.164 \text{ eV}$
 $E_2 = 4 E_1 = 0.668 \text{ eV}$ } $\Delta E \approx 0.5 \text{ eV}$

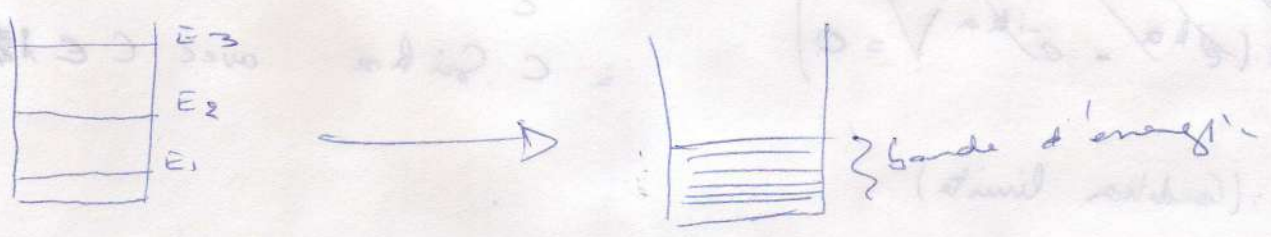
Même question e de chaîne d'atome d'or:



$E_1 = \frac{37.6}{10^{12}} = 3.76 \times 10^{-11} \text{ eV}$
 $E_2 = 4 E_1 = 1.5 \times 10^{-10} \text{ eV}$ } $\Delta E \approx 10^{-10} \text{ eV}$

+ on a quidi la barrière.
 plus les énergies se rapprochent.

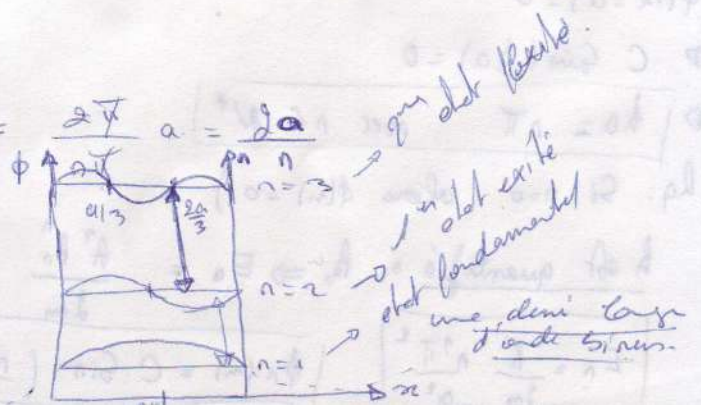
Les niveaux d'E ne ressemblent quand $a \rightarrow 0$; les niveaux d'E sont très très proches entre eux et forment une bande d'énergie permise.



Représentation des fonctions d'onde:

longueurs d'onde permises: $\lambda = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\pi}{\frac{n\pi}{a}} = \frac{2a}{n}$

car la + petite de fct sin est bien $\frac{\pi}{2} = a$



Constante de normalisation (c)

$$C \text{ tq } \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_n(x)|^2 dx = 1$$

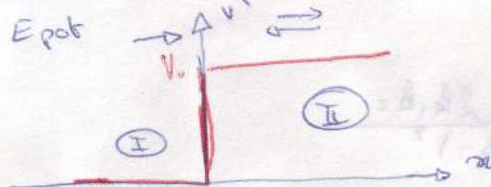
$$\begin{aligned} \int_0^a (\phi_n(x) \times \phi_n(x)) dx &= \int_0^a \left(C \sin \frac{n\pi x}{a} \right) \times \left(C^* \sin \frac{n\pi x}{a} \right) dx \\ &= |C|^2 \int_0^a \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx \\ &= |C|^2 \int_0^a \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |C|^2 \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \frac{a}{2n\pi} \sin \left(\frac{2n\pi x}{a} \right) \right]_0^a \\ &= |C|^2 \left[\frac{a}{2} - \frac{a}{4n\pi} \sin(2n\pi) - 0 + \sin 0 \right] = 1 \end{aligned}$$

$$|C|^2 \frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow C = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right)}$$

4) Marche de potentiel



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in]-\infty; 0[\\ V_0 & \forall x \in [0; +\infty[\end{cases}$$

Eq Schrodinger

Region I $\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x) = E \phi(x) \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x) + E \phi(x) = 0$

Region II $\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x) + V_0 \phi(x) = E \phi(x) \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x) + (E - V_0) \phi(x) = 0$

Les $E > 0$

$\phi(x)$ se propage ds les 2 milieux

① $\rightarrow \phi(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\phi_1'(x) = ik_1 A_1 e^{ik_1 x} - ik_1 B_1 e^{-ik_1 x}$$

② $\rightarrow \phi(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$

$$\phi_2'(x) = ik_2 A_2 e^{ik_2 x} + ik_2 B_2 e^{-ik_2 x}$$

$$-A_2B_2$$

$$\Rightarrow B_2 = 0$$

(1)

$$R_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$p_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$-P_2 B_2 = 1000 \text{ €}$ (II)

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = B_2 \\ k_1(A_1 - B_1) = i p_2 B_2 \end{cases}$$

Conduit à:

Coef de réflexion

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{k_1 - i p_2}{k_1 + p_2} \right|^2 = 1$$

$\begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$

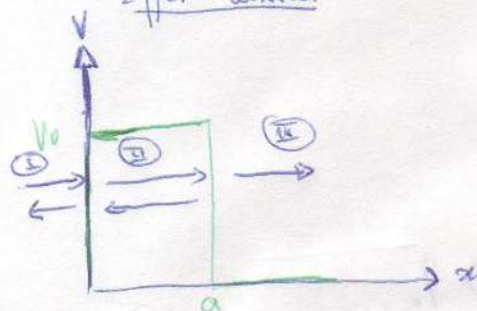
Conduit à: $2A_1 = B_2 \left(\frac{1 + i p_2}{k_1} \right)$

$$2B_1 = B_2 \left(1 - \frac{i p_2}{k_1} \right)$$

Réflexion totale $R=1$.

5) Barrière de potentiel

Effet tunnel



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[\\ V_0 & \forall x \in [0, a] \end{cases}$$

Où $E < V_0$

I $\rightarrow \phi_1(x) = A_1 e^{i k_1 x} + B_1 e^{-i k_1 x}$

II $\rightarrow \phi_2(x) = A_2 e^{p_2 x} + B_2 e^{-p_2 x}$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

III $\rightarrow \phi_3(x) = A_3 e^{i k_2 x}$

$$p_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

On a des I et II. Ça veut dire qu'on regarde une transmission à une même énergie $E = \text{cste}$.

Coef de transmission:

$$T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2$$

$$T = \frac{16 E (V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2 \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} a}$$

$$T \propto e^{-\frac{2 \sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} a}$$

AN. e^- $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg dans un métal

$-E + V_0 \approx 4$ eV. & 6 qu'il faut pour atteindre l' e^- au métal.

$$\Rightarrow p_2 = 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

(Recalculer sans ça)

Barrière $a = 0.1 \text{ nm}$.

$$\Rightarrow T \approx e^{-2} = 0.135$$

c.a.d que l' e^- a 80% de chance de passer à travers la barrière.

Variation de T par rapport à a .

$$\frac{dT}{da} \approx -2 p_2 T$$

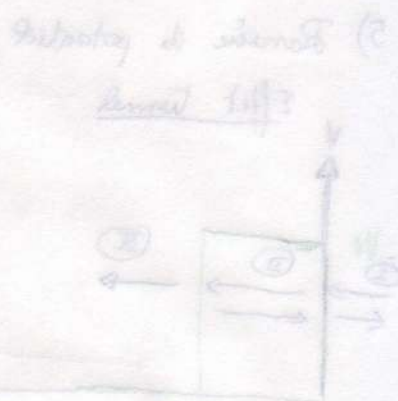
$$\frac{dT}{T} = -2 p_2 da$$

$$\frac{\Delta T}{T} = -2 p_2 \Delta a$$

$$\text{Soit } \Delta a = 1 \text{ pm} = \frac{1}{100} \text{ \AA} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = 2\%$$

$$= 10^{-12} \text{ m}$$

T est extrêmement sensible à l'épaisseur de la barrière.



$$T = \frac{A_{\text{trans}}}{A_{\text{inc}}} = \frac{1}{1 + \frac{m^2 a^2}{\hbar^2 k^2}}$$