

1. ψ solution de l'équation de Schrödinger si:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t)$$

• $\psi_A(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}: -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_A(x,t) &= -\frac{A\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} (-k \sin(kx - \omega t)) \\ &= \frac{A\hbar^2 k^2}{2m} \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

On sait que $\omega = E/\hbar$ et $k = p/\hbar$ et $E_c = p^2/2m$ et $E = E_c + V = E_c$ (particule libre)

$$\textcircled{1}: \frac{A\hbar^2 \times \frac{p^2}{\hbar^2}}{2m} \cos(kx - \omega t) = \frac{Ap^2}{2m} \cos(kx - \omega t) = \underline{AE_c \cos(kx - \omega t)}$$

$$\textcircled{2}: i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_A(x,t) = -i\hbar A \omega \sin(\omega t - kx) = \underline{-iAE_c \sin(\omega t - kx)}$$

On a donc $\textcircled{1} \neq \textcircled{2}$ donc $\psi_A(x,t)$ ne vérifie pas l'équation de Schrödinger

• $\psi_B(x,t) = B \sin(kx - \omega t)$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}: -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_B(x,t) &= -\frac{B\hbar^2 k^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} (\cos(kx - \omega t)) = \frac{+B\hbar^2 k^2}{2m} \sin(kx - \omega t) \\ &= \frac{Bp^2}{2m} \sin(kx - \omega t) = \underline{BE_c \sin(kx - \omega t)} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2}: i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_B(x,t) = -i\hbar B \omega \cos(\omega t - kx) = \underline{-iBE_c \cos(\omega t - kx)}$$

On a donc $\textcircled{1} \neq \textcircled{2}$ donc $\psi_B(x,t)$ ne vérifie pas l'équation de Schrödinger

2. Sur une autre planète $\psi(x,t) = A \exp\left(\frac{-i}{\hbar}(px - Et)\right)$ donc il faut que:

$$X \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) = Y \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t)$$

$$\Leftrightarrow A X \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{ip}{\hbar} \exp(\dots) \right) = Y A \left(\frac{E}{\hbar} i \exp(\dots) \right)$$

$$\Leftrightarrow -A X \frac{p^2}{\hbar^2} \exp(\dots) = Y A \frac{E}{\hbar} i \exp(\dots)$$

$$\Leftrightarrow -X \frac{p^2}{\hbar^2} = Y \frac{E}{\hbar} i \quad (E = E_c \rightarrow \text{particule libre})$$

Si on remplace X par $-\frac{\hbar^2}{2m}$ et Y par $i\hbar$ on obtiens

$$\frac{\hbar^2 p^2}{2m\hbar^2} \neq -\frac{E_c \hbar}{\hbar} \Leftrightarrow \frac{p^2}{2m} \neq -E_c \Leftrightarrow E_c \text{ donc il faut qu'on prenne}$$

$$\text{comme } X = +\frac{\hbar^2}{2m} \text{ et } Y = i\hbar \text{ pour avoir } -\frac{\hbar^2 p^2}{2m\hbar^2} = \frac{E_c \hbar}{\hbar} \Leftrightarrow E_c = E_c$$

Donc sur une autre planète la forme de l'équation de Schrödinger est:

$$\boxed{+\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t)}$$