

1) Equat° de Schrödinger stationnaire : $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \phi(x) = E \phi(x)$

Dans la région (I) : $V(x) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = E \phi(x)$$

Dans la région (II) : $V(x) = U_0 \neq 0 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + U_0 \phi(x) = E \phi(x)$

$$\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = \phi(x) (E - U_0)$$

Fonction d'onde stationnaire dans le milieu (I) :

$$\phi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \quad \text{avec } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Fonction d'onde stationnaire dans le milieu (II) :

$$\phi_{II}(x) = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} \quad \text{avec } \beta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

2) Condition de raccordements de $\phi(x)$ en $x=0$

$$\left. \begin{array}{l} \phi(x) \text{ continue} \\ \frac{d\phi(x)}{dx} \text{ continue} \end{array} \right\}$$

$$\phi'_I(x) = ik A_1 e^{ikx} - ik B_1 e^{-ikx}$$

$$\phi'_{II}(x) = \beta A_2 e^{\beta x} - \beta B_2 e^{-\beta x}$$

$$\phi(x) \text{ continue} \Rightarrow \text{en } x=0 : A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (L_1)$$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} \text{ continue} \Rightarrow \text{en } x=0 : ik A_1 - ik B_1 = \beta A_2 - \beta B_2 \quad (L_2)$$

$$\beta L_1 + L_2 \rightarrow \beta A_1 + ik A_1 + \beta B_1 - ik B_1 = 2\beta A_2$$

$$A_1 (\beta + ik) + B_1 (\beta - ik) = 2\beta A_2$$

$$A_1 (\beta + ik) + B_1 (\beta - ik) = 2\beta A_2$$

$$A_1 (\beta + ik) + B_1 (\beta - ik) = 2\beta A_2$$

$$\text{Hypothèse de la barrière épaisse : } A_2 \rightarrow 0 \Rightarrow A_1 (\beta + ik) = B_1 (ik - \beta)$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{ik - \beta}{\beta + ik} B_1 = -B_1$$

$$\text{D'après le cours, } R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{B_1}{-B_1} \right|^2 = |-1|^2 = 1 \quad \underline{\text{CQFD}}$$

Conclusion: Tous les électrons seraient réfléchis par le potentiel U_0 et ne pourraient entrer dans le milieu II.

3) Dans le milieu (II) : $\phi_{II}(x) = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x}$ avec $\beta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$

$$\begin{aligned} |\phi_{II}|^2 &= \phi_{II}^* \phi_{II} = \phi_{II}^2 \\ &= (A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x})^2 \\ &= A_2^2 e^{2\beta x} + 2A_2 B_2 + B_2^2 e^{-2\beta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |\phi_{II}|^2 dx &= \int_0^{+\infty} A_2^2 e^{2\beta x} + 2A_2 B_2 + B_2^2 e^{-2\beta x} dx \\ &= A_2^2 \int_0^{+\infty} e^{2\beta x} dx + 2A_2 B_2 \int_0^{+\infty} dx + B_2^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\beta x} dx \end{aligned}$$

Dans le milieu (I) : $\phi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$ $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$$\begin{aligned} |\phi_I|^2 &= (A_1 e^{-ikx} + B_1 e^{ikx})(A_1 e^{+ikx} + B_1 e^{-ikx}) \\ &= A_1^2 + A_1 B_1 e^{-2ikx} + B_1 A_1 e^{2ikx} + B_1^2 \\ &= A_1^2 + B_1^2 + A_1 B_1 (e^{-2ikx} + e^{2ikx}) \\ &= A_1^2 + B_1^2 + 2A_1 B_1 \cos(2kx) \end{aligned}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$