

5

11

Exercice 11

1) Eq de Schrödinger: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + V(x) \Phi(x) = E \Phi(x)$

Dans la région I

$$V(x) = 0 \Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) = E \Phi(x) \right]$$

Fonction d'onde stationnaire dans I:

$$\Phi_I(x) = \underline{A_1 e^{ikx}} + \underline{B_1 e^{-ikx}}$$

Or $E > U_0$ ($U_0 = 0$ dans I) $\Rightarrow \boxed{k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}$

Dans la région II

$$V(x) = U_0 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + U_0 \Phi(x) = E \Phi(x)$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) = (E - U_0) \Phi(x) \right]$$

Fct d'onde stationnaire dans II:

$$\Phi_{II}(x) = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x}$$

Or $E < U_0$ (ondes évanescentes) $\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}}$

2) Soient les conditions: $\Phi(x)$ et $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ continues en $x=0$

Nous avons $\begin{cases} \Phi'_I(x) = ik A_1 e^{ikx} - ik B_1 e^{-ikx} \\ \Phi'_{II}(x) = \beta A_2 e^{\beta x} - \beta B_2 e^{-\beta x} \end{cases}$

$$\Phi(x) \text{ continue en } 0 \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} \text{ continue en } 0 \Rightarrow ik A_1 - ik B_1 = \beta A_2 - \beta B_2$$

of course
II is b/

Nous avons obtenu : $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$

$$ik A_1 - ik B_1 = \beta A_2 - \beta B_2$$

Approximation de la barrière épaie : $A_2 \rightarrow 0$, cad pas d'onde évanescence retour dans la barrière.

$$A_1 + B_1 = B_2 \quad (1)$$

$$ik(A_1 - B_1) = -\beta B_2 \quad (2)$$

$$\beta(1) + (2)$$

$$\rightarrow \beta A_1 + \beta B_1 + ik A_1 - ik B_1 = 0$$

$(\Rightarrow)$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \frac{B_1}{A_1} = \frac{ik + \beta}{ik - \beta} = \frac{(ik + \beta)(ik + \beta)}{(ik - \beta)(ik + \beta)} = \frac{(ik + \beta)^2}{(ik)^2 - \beta^2}$$

$$\Rightarrow \frac{B_1}{A_1} = \frac{(ik + \beta)^2}{-k^2 - \beta^2} = \frac{-k^2 + \beta^2 + 2ik\beta}{-k^2 - \beta^2}$$

$$\text{D'où } R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \frac{-k^2 + \beta^2 + 2ik\beta}{-k^2 - \beta^2} \times \frac{-k^2 + \beta^2 - 2ik\beta}{-k^2 - \beta^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{(ik + \beta)^2 (ik - \beta)^2}{(ik + \beta)(ik - \beta)(ik + \beta)(ik - \beta)} \Rightarrow \boxed{R = 1}$$

Conclusion : $T = 0 \Rightarrow$ réflexion totale.

$$3) \text{ Dans le milieu II : } \Phi_{II}(x) = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x}$$

$$\text{avec } \beta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

$$|\Phi_{II}|^2 = \Phi_{II}^* \cdot \Phi_{II} = \Phi_{II}^2$$

$$\Leftrightarrow |\Phi_{\text{II}}|^2 = (A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x})^2 = A_2^2 e^{2\beta x} + B_2^2 e^{-2\beta x} + 2A_2 B_2$$

$$\int_0^{+\infty} |\Phi_{\text{II}}|^2 dx = \int_0^{+\infty} A_2^2 e^{2\beta x} + 2A_2 B_2 + B_2^2 e^{-2\beta x} dx$$

$$\Leftrightarrow = A_2^2 \int_0^{+\infty} e^{2\beta x} dx + 2A_2 B_2 \int_0^{+\infty} dx + B_2^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\beta x} dx$$