

Exercice 1:

- 1) Notre but est de montrer que Ψ_A et Ψ_B vérifie l'éq de Schrödinger cad qu'en les remplaçant dans l'éq de Sch. on ne vérifie pas l'équation:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \Psi_A(x,t) &= A \cos(kx - \omega t) \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Psi_A(x,t)}{\partial x} &= -A k \sin(kx - \omega t) \\ \frac{\partial^2 \Psi_A(x,t)}{\partial x^2} &= -A k^2 \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \right\} \text{ et } \frac{\partial \Psi_A(x,t)}{\partial t} = -A \omega \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Membre de gauche: $k = \frac{p}{\hbar}$ $E_c = \frac{p^2}{2m}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (-A) k^2 \cos(kx - \omega t) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{p^2}{\hbar^2} A \cos(-) = A \cdot \frac{p^2}{2m} \cos(-) = \boxed{A E_c \cos(kx - \omega t)} \quad (1)$$

Membre de droite: $i\hbar \cdot (-A) \omega \sin(kx - \omega t) = \boxed{-i A E \sin(kx - \omega t)} \quad (2)$

avec $E = E_c + V = E_c$ car $V = 0$.

D'où (1) $\neq$ (2), Ψ_A ne vérifie pas

$$\Psi_B(x,t) = B \sin(kx - \omega t)$$

Même raisonnement.

Membre de gauche: $k = \frac{p}{\hbar}$ $E_c = \frac{p^2}{2m}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_B(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} (-B) k^2 \sin(kx - \omega t) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{p^2}{\hbar^2} B \sin(-) = \boxed{B E_c \sin(kx - \omega t)} \quad (1)$$

Membre de droite: $i\hbar B(-\omega) \cos(kx - \omega t) = \boxed{-i B E \cos(kx - \omega t)} \quad (2)$

$E = \omega \hbar$

(1) $\neq$ (2), Ψ_B ne vérifie pas

2) Énoncé: $\Psi(x,t) = A e^{-i/\hbar(px - Et)}$

Même raisonnement que ds le cours
II 2) Eq de Sch.

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = -\frac{A i}{\hbar} p e^{-i/\hbar(px - Et)} = -\frac{i p}{\hbar} \Psi(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{i}{\hbar} A p^2 e^{-i/\hbar(px - Et)} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi(x,t)$$

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = +\frac{A i E}{\hbar} e^{-i/\hbar(px - Et)}$$

$$= i \frac{E}{\hbar} \Psi(x,t)$$

2. $\Psi(x, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$ Convention normale

On va prendre $\Psi(x, t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$ Convention alien

Pour construire l'équation de Schrödinger

- On dérive 1 fois p/r au temps

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[A e^{-\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \right] = \frac{-i}{\hbar} E A e^{-\frac{i}{\hbar}(px - Et)} = \frac{-i}{\hbar} E \Psi(x, t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = E \Psi(x, t)} \quad (1)$$

- On dérive 2 fois p/r à la position
1^{re} dérivée

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) = -\frac{i}{\hbar} p A e^{-\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

2^{me} dérivée

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{i}{\hbar} p A e^{-\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \right] = \left(-\frac{i}{\hbar} p \right)^2 A e^{-\frac{i}{\hbar}(px - Et)} = \boxed{-\frac{p^2}{\hbar^2} A e^{-\frac{i}{\hbar}(px - Et)}} \quad (2)$$

On utilise $E_c = \frac{p^2}{2m}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = E_c \Psi(x, t)} \quad (2)$$

On construit l'équation de Schrödinger avec la convention "à l'alien"

Soit une fct d'onde $\psi(x,t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$

Dans le cas où la particule est libre (potentiel à 0)

$$E = E_c + V \Leftrightarrow E = E_c$$

Soit d'après (1) et (2)

$$\begin{aligned} E \psi(x,t) &= E_c \psi(x,t) \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) \end{aligned}$$

L'équation de Schrödinger a la même forme!

Nous avons donc : $\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi(x,t) \quad / \quad \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = i \frac{E}{\hbar} \Psi(x,t)$

Or $\left. \begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m v^2 \\ p^2 &= m^2 v^2 \end{aligned} \right\} p^2 = 2m E_c$

D'où $\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{2m E_c}{\hbar^2} \Psi(x,t) \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = E_c \Psi(x,t)$

$\neq -i$ et $-i \hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = E \Psi(x,t) \quad (2)$

Avec $E = E_c$, nous avons donc (1) = (2)

$$-i \hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i \hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}}$$

3) Mq $\Psi(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)}$ vérifie l'éq de l'énoncé

$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = k i \Psi(x,t)$	$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\omega i \Psi(x,t)$
$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = k^2 i^2 \Psi(x,t) = -k^2 \Psi(x,t)$	$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = +\omega^2 i^2 \Psi(x,t) = -\omega^2 \Psi(x,t)$

D'où : $-\omega^2 \Psi(x,t) + c^2 k^2 \Psi(x,t) + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \Psi(x,t) = 0$

$$\Leftrightarrow -\hbar^2 \omega^2 \Psi(x,t) + c^2 \hbar^2 k^2 \Psi(x,t) + m^2 c^4 \Psi(x,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -E^2 \Psi(x,t) + c^2 p^2 \Psi(x,t) + c^4 m^2 \Psi(x,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Psi(x,t) (-E^2 + c^2 p^2 + c^4 m^2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

(4)

TAI Physique Quantique

TAI n°4

3- ⚠ Ask sensu : substitution simple?

On remplace dans l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial c^2} A e^{i(kx - \omega t)} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} A e^{i(kx - \omega t)} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} A e^{i(kx - \omega t)} = 0 \\ \Leftrightarrow & -i\omega \frac{\partial}{\partial c} A e^{i(kx - \omega t)} - i\hbar c^2 \frac{\partial}{\partial x} A e^{i(kx - \omega t)} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} A e^{i(kx - \omega t)} = 0 \\ \Leftrightarrow & -\omega^2 A e^{i(kx - \omega t)} + \hbar^2 c^2 A e^{i(kx - \omega t)} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} A e^{i(kx - \omega t)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} - \omega^2 + \hbar^2 c^2 \right) A e^{i(kx - \omega t)} = 0 \\ & \quad \uparrow \\ & \quad \text{peut s'annuler.} \end{aligned}$$

Donc l'éq de KG admet des sol de la forme $\Psi(x, t) =$

$$(m^2 c^4 - \hbar^2 \omega^2 + \hbar^2 k^2 c^2) = 0$$

$$m^2 c^4 - E^2 + p^2 c^2 = 0$$

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

$$E^2 = c^2 (m^2 c^2 + p^2)$$

$$\boxed{E = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}}$$