

Exercice 7

1) La densité de probabilité d'un photon auquel cette onde est associée est $P(t) = \psi^* \times \psi$

• Entre $-\frac{\tau}{2}$ et $\frac{\tau}{2}$: $P(t) = \psi^* \times \psi = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \times e^{-i\omega_0 t} \times$

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} \times e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{\tau} \times e^0 = \boxed{\frac{1}{\tau}}$$

• Ailleurs :

$$P(t) = \psi^* \times \psi = 0$$

Le photon présente une probabilité uniforme de se manifester égal à $\frac{1}{\tau}$ dans l'intervalle

de temps $\Delta t = \tau$

$$2) A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} P(t) e^{i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\tau}} \times \left[\frac{e^{i(\omega - \omega_0)t}}{i(\omega - \omega_0)} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\tau}} \times \left(\frac{e^{\frac{\tau}{2}i(\omega - \omega_0)} - e^{-\frac{\tau}{2}i(\omega - \omega_0)}}{i(\omega - \omega_0)} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\tau}} \times \frac{\cos\left(\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right) + i \sin\left(\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right) - \cos\left(-\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right) - i \sin\left(-\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right)}{i(\omega - \omega_0)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\tau}} \times \frac{\cos\left(\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right) + i \sin\left(\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right) - \cos\left(\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right) + i \sin\left(\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right)}{i(\omega - \omega_0)}$$

Regel: $\cos(-\theta) = \cos \theta$
 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\tau}} \times \frac{2 \sin\left(\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right)}{\omega - \omega_0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{\sqrt{\tau}}{\tau} \times \frac{2 \sin\left(\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right)}{\omega - \omega_0}$$

$$= \underbrace{\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}}_C \times \frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right)}{(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}}$$