

Vérifier ce qui précède

$$\Delta x \Delta p = \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \cdot \frac{\hbar \alpha}{2} = \frac{\hbar \sqrt{3}}{2} \geq \frac{\hbar}{2} \quad \checkmark$$

Exercice 8

1) cf cours II 2) Eq de Schrödinger ^{pour une particule} soumise à un potentiel

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + V(x) \cdot \Phi(x) = i \hbar \frac{d \Phi(x)}{dt}$$

Notre but est de trouver $V(x)$.

Nous savons que $E = i \hbar \frac{d}{dt}$ (cf cours même partie)

$$\frac{d \Phi(x)}{dx} = N \left(e^{-\alpha x} + (-\alpha)x e^{-\alpha x} \right) = N e^{-\alpha x} (1 - \alpha x)$$

$$\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = N \left(-\alpha e^{-\alpha x} (1 - \alpha x) + e^{-\alpha x} (0 - \alpha) \right)$$

$$= N(-\alpha) \left(e^{-\alpha x} - \alpha x e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x} \right)$$

$$= (-\alpha) N e^{-\alpha x} (2 - \alpha x)$$

Nous connaissons donc toutes les variables, D'où :

$$V(x) = \frac{E \cdot \Phi(x)}{N x e^{-\alpha x}} + \frac{\hbar^2}{2m} (-\alpha N e^{-\alpha x} (2 - \alpha x))$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot N x e^{-\alpha x} + \frac{\hbar^2}{2m} (-\alpha) N e^{-\alpha x} (2 - \alpha x)}{N x e^{-\alpha x}}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{-\hbar^2 \alpha^2 x + \hbar^2 (-\alpha) (2 - \alpha x)}{2 m x}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{-\hbar^2 \alpha^2 x - 2 \alpha \hbar^2 + \hbar^2 \alpha^2 x}{2 m x}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{-\alpha \hbar^2}{m x} \quad \text{pour } x \neq 0$$

$$\text{Pour } x = 0 : V(x) = 0$$

$$\text{Si on a } V(x) = E \Phi(x) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} \Leftrightarrow V(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2}$$

Or x ailleurs de $0 \leq x < +\infty$ donc $\Phi(x) = 0$

$$\text{Donc } V(x) = +\infty$$

$$2) P(x \leq \text{particule} \leq x + dx) = \int_x^{x+dx} |\Phi(x)|^2 dx = \int_x^{x+dx} N^2 x^2 e^{-2\alpha x} dx$$

$$\text{Soit } f(x) = N^2 x^2 e^{-2\alpha x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = N^2 (2x e^{-2\alpha x} - x^2 \cdot 2\alpha e^{-2\alpha x}) = 2N^2 e^{-2\alpha x} (x - x^2 \alpha)$$

Max quand $f'(x) = 0$ c'est quand :

$$\begin{cases} 2N^2 e^{-2\alpha x} = 0 \\ x - x^2 \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - \alpha x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

on divise par x , donc pour diviser on suppose $x \neq 0$. Mais il faut quand même étudier $x = 0$.

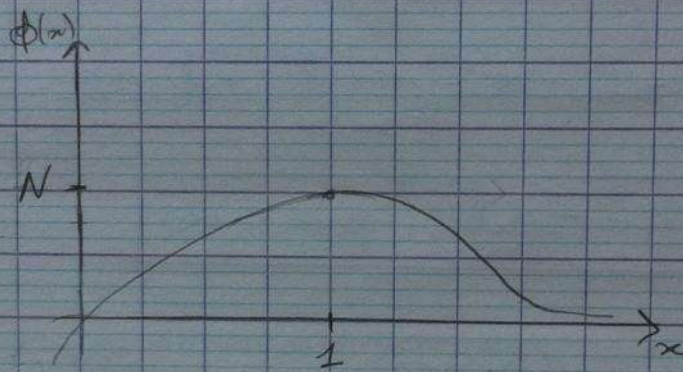
Etude des variations

x	0	$1/\alpha$	$+\infty$
$2Nxe^{-2\alpha x}$	+	+	+
$1-\alpha x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\nearrow N \frac{1}{\alpha^2} e^{-2}$ $\searrow$	

3)

$$\alpha = 1$$

$$x_{\max} = \frac{1}{\alpha} = 1$$



E_1 : état fondamental
 E_2 : 1^{er} état excité

$$\alpha = 2$$

$$x_{\max} = 1/2$$

