ex 9

1) $\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t) \cdot \hat{H} \cdot \Psi(x,t)\, dx$

$\Leftrightarrow \langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A\Psi_1(x,t) + B\Psi_2(x,t)\right)\left(\hat{H}A\Phi_1(x)e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}} + \hat{H}B\Phi_2(x)e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}}\right) dx$

$\Leftrightarrow \langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 E_1 \Phi_1^2(x) e^{-\frac{2iE_1t}{\hbar}} + AB\Phi_1(x)\overline{\Phi}_2(x)e^{-iE_1t/\hbar - iE_2t/\hbar}$

$+ BA\, E_1 \Phi_1(x)\Phi_2(x)e^{-iE_1t/\hbar - iE_2t/\hbar} + |B|^2 E_2 \Phi_2(x)e^{-\frac{2iE_2t}{\hbar}} dx$

Or il s'agit de fonctions d'ondes normés:

$\Rightarrow \int \Psi_1^2(x,t)\, dx = 1 \Leftrightarrow \int \Phi_1^2(x) e^{-2E_1 i t/\hbar} = 1$ de même pour Ψ_2.

Et $\int \Psi_1(x,t) \cdot \Psi_2(x,t)\, dx = 0$

D'où $\langle E \rangle = |A|^2 E_1 + |B|^2 E_2$

Nous cherchons A et B tel que: $\langle E \rangle = 1/4\, E_1 + 3/4\, E_2$

$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2} \text{ et } B = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{\Psi(x,t) = \frac{1}{2}\Psi_1(x,t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_2(x,t)}$

2) $\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \sqrt{|A|^2 E_1^2 + |B|^2 E_2^2 - (|A|^2 E_1 + |B|^2 E_2)^2}$

$\Leftrightarrow \Delta E = \sqrt{|A|^2 E_1^2 + |B|^2 E_2^2 - |A|^4 E_1^2 - |B|^4 E_2^2 - 2|A|^2|B|^2 E_1 E_2}$

$\Leftrightarrow \Delta E = \sqrt{\frac{1}{4}E_1^2 + \frac{3}{4}E_2^2 - \frac{1}{16}E_1^2 - \frac{9}{16}E_2^2 - \frac{3}{8}E_1E_2}$

$\Leftrightarrow \Delta E = \sqrt{\frac{3}{16}E_1^2 + \frac{3}{16}E_2^2 - \frac{6}{16}E_1E_2} = \sqrt{\frac{3}{16}(E_1^2 + E_2 - 2E_1E_2)}$

$\Leftrightarrow \Delta E = \sqrt{\frac{3}{16}(E_1 - E_2)^2} \Leftrightarrow \boxed{\Delta E = \frac{\sqrt{3}}{4}(E_1 - E_2)}$

$|\Psi|^2 = \Psi^*(x,t) \cdot \Psi(x,t)$

$= \left(\frac{1}{2}\Phi_1(x)\, e^{i\frac{E_1 t}{\hbar}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\Phi_2(x)\, e^{i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right)\left(\frac{1}{2}\Phi_1(x) e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\Phi_2(x) e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right)$

$= \frac{1}{4}|\Phi_1(x)|^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\Phi_1(x)\Phi_2(x)\, e^{i\frac{(E_1-E_2)t}{\hbar}} + \frac{\sqrt{3}}{4}\Phi_1(x)\Phi_2(x)\, e^{i\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}} + \frac{3}{4}|\Phi_2(x)|^2$

$= \frac{1}{4}|\Phi_1(x)|^2 + \frac{3}{4}|\Phi_2(x)|^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\Phi_1(x)\Phi_2(x)\left[e^{i\frac{(E_1-E_2)t}{\hbar}} + e^{-i\frac{(E_1-E_2)t}{\hbar}}\right]$

$= \text{————————} + \frac{\sqrt{3}}{2}\Phi_1(x)\Phi_2(x)\cos\left(\frac{(E_1-E_2)}{\hbar}t\right)$

$|\Psi|^2$ oscille à la pulsation : $\frac{E_1 - E_2}{\hbar}$

$\Rightarrow \omega = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}$ et $\omega = 2\pi\nu$

D'où $\frac{\Delta E}{\hbar} = 2\pi\nu$

$\Leftrightarrow \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{2\pi}{T}$

$\Leftrightarrow \boxed{\Delta E \cdot \Delta t = 2\pi\hbar = h}$