

Exercice 3

1) Cherchons à calculer $\langle E \rangle$.

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, 0) \cdot \hat{H} \cdot \Psi(x, 0) dx$$

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (A \Psi_1(x, 0) + B \Psi_2(x, 0)) \left(\hat{H} A \Phi_1(x) e^{-iE_1 t} + \hat{H} B \Phi_2(x) e^{-iE_2 t} \right) dx$$

$$\hat{H} \Phi_1 = E_1 \Phi_1$$

$$\hat{H} \Phi_2 = E_2 \Phi_2$$

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 E_1 \Phi_1^2(x) e^{-2iE_1 t} + AB \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x) e^{-iE_1 t - iE_2 t} + BA E_2 \Phi_1(x) \Phi_2(x) e^{-iE_1 t - iE_2 t} + |B|^2 E_2 \Phi_2^2(x) e^{-2iE_2 t} dx$$

On il s'agit de fonctions d'ondes normales.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^2(x, 0) dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1^2(x) e^{-2iE_1 t} dx = 1$$

de même pour Ψ_2

$$\text{et } \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(x, 0) \cdot \Psi_2(x, 0) dx = 0.$$

$$\text{D'où } \langle E \rangle = |A|^2 E_1 + |B|^2 E_2$$

Nous cherchons A et B tel que : $\langle E \rangle = \frac{1}{4} E_1 + \frac{3}{4} E_2$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2} \text{ et } B = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{et } \Psi(x, t) = \frac{1}{2} \Psi_1(x, t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \Psi_2(x, t)$$

$$2) \Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \sqrt{|A|^2 E_1^2 + |B|^2 E_2^2 - (|A|^2 E_1 + |B|^2 E_2)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \sqrt{|A|^2 E_1^2 + |B|^2 E_2^2 - |A|^4 E_1^2 - |B|^4 E_2^2 - 2|A|^2 |B|^2 E_1 E_2}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \sqrt{\frac{1}{4} E_1^2 + \frac{3}{4} E_2^2 - \frac{1}{16} E_1^2 - \frac{9}{16} E_2^2 - \frac{3}{8} E_1 E_2}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \sqrt{\frac{3}{16} E_1^2 + \frac{3}{16} E_2^2 - \frac{6}{16} E_1 E_2} = \sqrt{\frac{3}{16} (E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2)}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \sqrt{\frac{3}{16} (E_1 - E_2)^2} \Rightarrow \boxed{\Delta E = \frac{\sqrt{3}}{4} (E_1 - E_2)}$$

3) Dépendance en temps de la densité de probabilité de présence:

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 &= \Psi^*(x,t) \Psi(x,t) \\ &= \frac{1}{2} (\phi_1(x) e^{+iE_1 t/\hbar} + \sqrt{3} \phi_2 e^{iE_2 t/\hbar}) \\ &\quad (\phi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + \sqrt{3} \phi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}) \\ &= \frac{1}{2} (|\phi_1|^2 + 3|\phi_2|^2 + \sqrt{3} \phi_2 \phi_1^* e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar} \\ &\quad + \sqrt{3} \phi_1 \phi_2^* e^{i(E_2 - E_1)t/\hbar}) \end{aligned}$$

A priori ϕ_1 et ϕ_2 sont réelles.

$$\text{D'où } |\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + 3\phi_2^2 + 2\sqrt{3} \phi_1 \phi_2 \cos(E_2 - E_1) \frac{t}{\hbar})$$

Donc (cosinus) $|\Psi|^2$ oscille dans le temps.

Trouver la relation qui existe entre la période de ces oscillations et l'incertitude sur l'énergie:

?