

d) Fonction de répartition à deux dimensionsRappel

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Sur les variables à une dimension:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

A deux dimensions:

2) v.a indépendantes**a) Définitions:**

les v.a X et Y sont indépendantes ssi:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

ou

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Analogie avec

avec A et B indépendants

Si indépendance:

Connaissance de $P(X = x, Y = y)$
 $\Updownarrow$
 Connaissance de $P(X = x)$ et $P(Y = y)$

De même:

connaissance de $f(x, y)$
 $\Updownarrow$
 connaissance de $f_X(x)$ et $f_Y(y)$

Cas de	X \ Y	Y			P(X = x)
		1	3	4	
1		0,06	0,15	0,09	P(X = 1) = 0,3
2		0,14	0,35	0,21	P(X = 2) = 0,7
P(Y = y)		0,2	0,5	0,3	
P(X = 2, Y = 3) = 0,35					

X et Y indépendants ?

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \\ \forall (x, y)$$

Si c'est indépendants:

Par exemple:

$$P(X = 2, Y = 3) = 0,35$$

$$P(X = 2)P(Y = 3) = 0,7 \times 0,5 = 0,35$$

$$P(X = 1, Y = 1) = 0,06$$

$$P(X = 1)P(Y = 1) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$$

etc. => variable indépendantes

Contre exemple:

Jeu avec une pièce de monnaie et un dé. On avait

$$P(X = 1, Y = -10\text{€}) = 0$$

$$P(X = 1)P(Y = -10\text{€}) = \frac{11}{21} \times \frac{5}{72} \neq 0$$

donc X et Y pas indépendantes

• Cas d'une v.a continue
cible

-> carré

$$\text{On avait } f(x, y) = \frac{1}{4}, f_X(x) = \frac{1}{2}, f_Y(y) = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où ici, } f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

=> X, Y sont des v.a indépendantes

-> disque

X et Y sont liés par la relation $X^2 + Y^2 \leq a^2$

$$\text{On a vu que } f(x, y) = \frac{1}{\pi a^2}$$

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - y^2}$$

Si X et Y indépendants

c) Conséquences:

Si X et Y sont indépendants

$$P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2)P(y_1 \leq Y \leq y_2)$$

Remarque:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$F(x, y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

d) Extension à n variables

Théorème: n v.a $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes si

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \dots P(X_n = x_n)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n)$$

$$\omega \rightarrow h[X(\omega), Y(\omega)]$$

3) Fonctions de variables aléatoires

a) Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a

Soit h une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

alors l'explication de

est aussi une v.a notée $h(X, Y)$

Exemple: $h(X, Y) = X + Y, X^2 + 4Y \dots$

b) Lois de probabilité de $h(X, Y)$

• Cas v.a discrète:

Cela va se calculer à partir de $P(X = x, Y = y)$

Relativement simple dans le cas discret

Car disjoints

Car indépendants

Méthode donnée sur l'exemple:

Soit X et Y deux v.a à valeurs entières et indépendantes

Soit $h(X, Y) = X + Y$ noté S

• Loi de probabilité de S ?

On a

$$P(S = X + Y = s) = P[(X = 0, Y = s) \vee (X = 1, Y = s - 1) \dots \vee (X = s, Y = 0)]$$

$$= P(X = 0, Y = s) + P(X = 1, Y = s - 1) + \dots + P(X = s, Y = 0)$$

$$= P(X = 0)P(Y = s) + P(X = 1)P(Y = s - 1) + \dots + P(X = s)P(Y = 0)$$

$$P(S = s) = \sum_{x=0}^s P(X = x)P(Y = s - x)$$

Alors

Exemple:

$$= e^{-(\lambda + \mu)} \sum_{x=0}^s \frac{C_s^x}{s!} \lambda^x \mu^{s-x}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda + \mu)}}{s!} (\lambda + \mu)^s$$

X suit la loi de Poisson de paramètre λ : $P(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

Y suit la loi de Poisson de paramètre μ : $P(Y=y) = \frac{\mu^y}{y!} e^{-\mu}$

d'où $P(S=s) = \sum_{x=0}^s \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \times \frac{\mu^y}{(s-x)!} e^{-\mu}$

$f(x,y)$

$$= P[(X,Y) \quad h(X,Y) \leq s]$$

Loi de poisson de paramètre $\mu + \lambda$

• v.a continues:

On veut calculer la densité de probabilité de la v.a $h(X,Y)$?

On connaît la densité de probabilité jointe du couple (X, Y) notée

Méthode: On va déterminer la fonction de répartition de $h(X,Y)$

Si on note $s = h(X,Y)$

$$F(s) = P(S \leq s) = P[h(X,Y) \leq s]$$

tel que

On peut voir que $h(X,Y) \leq s$ correspond à une région du plan notée $A(s)$ limitée par la courbe $h(x,y) = s$ (frontière)

$$= \iint_{A(s)} f(x,y) dx dy$$

D'où $F(s) = P[(X,Y) \in A(s)]$

$$F(s) = \iint_{A(s)} f(x,y) dx dy = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{y=-\infty}^{s-x} f(x,y) dy \right] dx$$

Exemple: Loi de probabilité de $S = X + Y$

Densité de probabilité jointe de $f(x,y)$ est connue

On a $F(s) = P[X + Y \leq s]$

$$= \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x, s-x) dx$$

f est connue

$$\text{donc } f(s) = F'(s) = \frac{d}{ds} \left\{ \int_{x=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{y=-\infty}^{s-x} f(x,y) dy \right] dx \right\}$$

$$\text{donc } f(s) = F'(s) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} \left[\int_{y=-\infty}^{s-x} f(x,y) dy \right] dx$$

On pourra calculer cette intégrale

Cas particulier:

Si X et Y indépendantes $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

On peut montrer que $f_{X+Y} = f_X \times f_Y$

$$E[h(X,Y)] = \int \int h(x,y) f(x,y) dx dy$$

c) **Esérance de h(X,Y)**

• Rappel : Cas à une dimension

$$E(X) = \sum_x x P(X=x) \quad \text{v.a discrète}$$

$$E(X) = \int x f(x) dx \quad \text{v.a continue}$$

d'où $E[h(X)] = \sum_x h(x) P(X=x)$

Par analogie:

$$E[h(X,Y)] = \sum_x \sum_y h(x,y) P(X=x, Y=y)$$

Si X et Y v.a discrète:

$$E[h(X,Y)] = \int \int h(x,y) f(x,y) dx dy$$

Si X et Y v.a continues:

Exemple fondamentaux:

$$\rightarrow E(aX + bY) = a \int \int x f(x,y) dx dy + b \int \int y f(x,y) dx dy$$

si a et b sont des constantes, on parle d'un opérateur dit linéaire

Démonstration: $E[aX + bY] = a \int \int x f(x,y) dx dy + b \int \int y f(x,y) dx dy$

$$\rightarrow E(aX + bY) = E[h(X,Y)]$$

où $h(X,Y) = aX + bY$

$$E[h(X,Y)] = \int \int (ax + by) f(x,y) dx dy = a \int \int x f(x,y) dx dy + b \int \int y f(x,y) dx dy$$

or

$$= aE(X) + bE(Y)$$

--> X, Y indépendants alors $E(X, Y) = E(X)E(Y)$

$h(X, Y) = XY$
Attention, la réciproque est fausse !!!

$$= \sum_x \sum_y h(x, y) P(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_x \sum_y xy P(X = x) P(Y = y) \quad \text{car X et Y Indépendants}$$

$$= \left(\sum_x x P(X = x) \right) \left(\sum_y y P(Y = y) \right)$$

Démonstration:
 $E(XY) = E[f(X, Y)]$ ou
 $E(XY) = E[X]E(Y)$

De même, si X et Y indépendants, $E[h(X)g(Y)] = E[h(X)]E[g(Y)]$
d) Variance de h(X, Y)

Rappel:
$$= \iint_D h^2(x, y) f(x, y) dx dy - \left(\iint_D h(x, y) f(x, y) dx dy \right)^2$$

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$

Donc

$$Var[h(X, Y)] = E[(h(X, Y) - E[h(X, Y)])^2] = E[(h(X, Y))^2] - (E[h(X, Y)])^2$$

$$\boxed{cov(X, Y) = E(X, Y) - E(X)E(Y)}$$

4) Covariance et coefficient de corrélation:

a) Covariance

Définition:

Soient X et Y deux v.a alors la covariance de X et Y vaut

Propriété: Si X et Y indépendants alors $cov(X, Y) = 0$

de même $Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab cov(X, Y)$

b) Coefficient de corrélation**Définition:**

Soient X et Y deux v.a. Le coefficient de corrélation vaut

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

on a $-1 \leq \rho \leq +1$ deux cas extrêmes

→ X et Y indépendants

⇒ $\text{cov}(X, Y) = 0$

⇒ $\rho = 0$

→ $X = Y$

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, X)}{\sigma_X \sigma_X} = \frac{E(XX) - E(X)E(X)}{\text{Var}(X)} = \frac{E(X^2) - (E(X))^2}{\text{Var}(X)} = \frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(X)} = +1$$

on va avoir

Donc ce coefficient de corrélation mesure le degré d'indépendance entre X et Y $\forall (a, b)$

Si on veut montrer que $|\rho| \leq 1$

• Démonstration:

On pose $Z = aX + bY$

$$\sigma_Z^2 = a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2 + 2ab \text{cov}(X, Y) = \text{Var}(Z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{si on pose } x = a$$

$$\Delta = 4b^2 (\text{cov}(X, Y))^2 - 4a^2 \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \leq 0$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow \text{cov}^2(X, Y) \leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2$$

$$\Rightarrow |\rho| \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \rho \leq +1$$