



# Fiche de mathématiques

◀ probabilités

## Les Probabilités

### LOI DE PROBABILITÉ

#### EXERCICE 1

Une urne contient neuf boules.  
Quatre de ces boules portent le numéro 0, trois portent le numéro 1 et deux le numéro 2.  
Tous les tirages sont supposés équiprobables.  
On tire au hasard deux boules simultanément. Soit  $X$ , la somme des numéros marqués sur ces boules.  
Déterminer et représenter graphiquement la loi de probabilité de  $X$ .  
Tracer aussi la courbe cumulative (= représentation graphique de la fonction de répartition)

#### EXERCICE 2

Montrer que  $p(ab) = p(X \leq b) - p(X \leq a)$ .

### VALEURS CARACTÉRISTIQUES D'UNE LOI DE PROBABILITÉ DISCRÈTE

#### EXERCICE 3

Soit  $Y$  la variable aléatoire qui correspond à la somme obtenue en lançant deux dés.  
Après avoir rappelé la définition générale, calculer l'espérance mathématique de  $Y$ .

#### EXERCICE 4

Rappeler les définitions de la variance et de l'écart-type.

#### EXERCICE 5

Compléter les égalités suivantes :

|                         |                           |                         |                           |
|-------------------------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|
| $E(X + \alpha) = \dots$ | $(\alpha \in \mathbb{R})$ | $V(X + \alpha) = \dots$ | $(\alpha \in \mathbb{R})$ |
| $E(X - \alpha) = \dots$ | $(\alpha \in \mathbb{R})$ | $V(X - \alpha) = \dots$ | $(\alpha \in \mathbb{R})$ |
| $E(kX) = \dots$         | $(k \in \mathbb{R})$      | $V(kX) = \dots$         | $(k \in \mathbb{R})$      |

### INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBICHEV

#### EXERCICE 6

On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev :  $p(|X - E(X)| > t) < \frac{V(X)}{t^2}$

Soit l'expérience consistant au jet d'un dé où l'on suppose l'équiprobabilité d'apparition de chaque face.  
Soit  $X$  la variable aléatoire égale au numéro lu sur la face supérieure.

1. Trouver, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, un majorant de la probabilité de l'événement suivant: « L'écart absolu entre la variable aléatoire et son espérance mathématique est strictement supérieur à 2 ».
2. Calculer exactement la probabilité de l'événement. Comparer cette valeur exacte avec le majorant obtenu en 1.

### LES LOIS DE PROBABILITÉ CLASSIQUES

#### EXERCICE 7

Rappeler tout ce qu'il faut savoir sur :

- la loi Binomiale
- la loi de Poisson
- la loi Normale ( et normale centrée réduite )

## EXERCICE 8

Soit deux avions : un biréacteur B et un quadriréacteur Q. On suppose que tous les réacteurs de ces avions ont la même probabilité  $p$ , de tomber en panne, et qu'ils sont indépendants les uns des autres.

Appelons  $X$  et  $Y$  les variables aléatoires suivantes :

$X$ : « nombre de réacteurs de B, tombant en panne »

$Y$ : « nombre de réacteurs de Q, tombant en panne »

1. Etablir les lois de probabilité de  $X$  et  $Y$ .
2. On estime qu'un avion ne peut achever son vol que si la moitié au moins de ses réacteurs fonctionnent normalement. Soient  $P_B$  et  $P_Q$  les probabilités d'un vol réussi respectivement par B et par Q.  
Calculer  $P_B$  et  $P_Q$  en fonction de  $p$ . Indiquer selon les valeurs de  $p$ , celui des deux avions B ou Q qui offre la meilleure sécurité.

## EXERCICE 9

Il a été constaté statistiquement que, sur une chaîne de montage donnée, sur 1000 appareils qui sortent, 5 sont défectueux.

En assimilant la fréquence à la probabilité, montrer que la variable aléatoire donnant le nombre d'appareils défectueux, lorsqu'on prélève successivement 80 appareils dans la chaîne de montage, suit une loi binomiale que l'on précisera.

Justifier l'approximation de cette loi binomiale par une loi de Poisson que l'on déterminera. Utiliser cette loi de Poisson pour calculer les probabilités des événements suivants :

1. aucun appareil n'est défectueux;
2. deux appareils sont défectueux;
3. plus de deux appareils sont défectueux;
4. moins de cinq appareils sont défectueux.

## EXERCICE 10

Une variable aléatoire suit une loi normale  $N(m,s)$  avec  $m = 3$  et  $s = 12$ .

1. Déterminer le réel  $X$  tel que :  $p(X > x) = 0,6255$ .
2. Calculer la probabilité pour que :  $3,25 < X < 4,75$

## EXERCICE 11

Le contrôle du poids (en grammes) des pièces fabriquées par une même machine permet de conclure que ces poids suivent une loi normale de moyenne 462 et de variance 2,89.

1. Quelle est la probabilité pour que le poids d'une pièce soit inférieur à 465,06 grammes?
2. Quelle est la probabilité pour que le poids d'une pièce dépasse 463,989 grammes ?

## COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

### EXERCICE 12

La loi de probabilité d'un couple  $(X,Y)$  de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  définies sur un même univers  $W$  est donnée par le tableau suivant :

| $X \backslash Y$ | -2   | -1   | 0    | 1    | 2    |
|------------------|------|------|------|------|------|
| -1               | 0,02 | 0,04 | 0,08 | 0,04 | 0,02 |
| 0                | 0,06 | 0,04 | 0,30 | 0,07 | 0,03 |
| 1                | 0,02 | 0,12 | 0,02 | 0,09 | 0,05 |

1. Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
2. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la probabilité :  $p(X+Y)=0$ .
4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $H = XY$ .

## LOIS LIMITES

## EXERCICE 13

Énoncer :

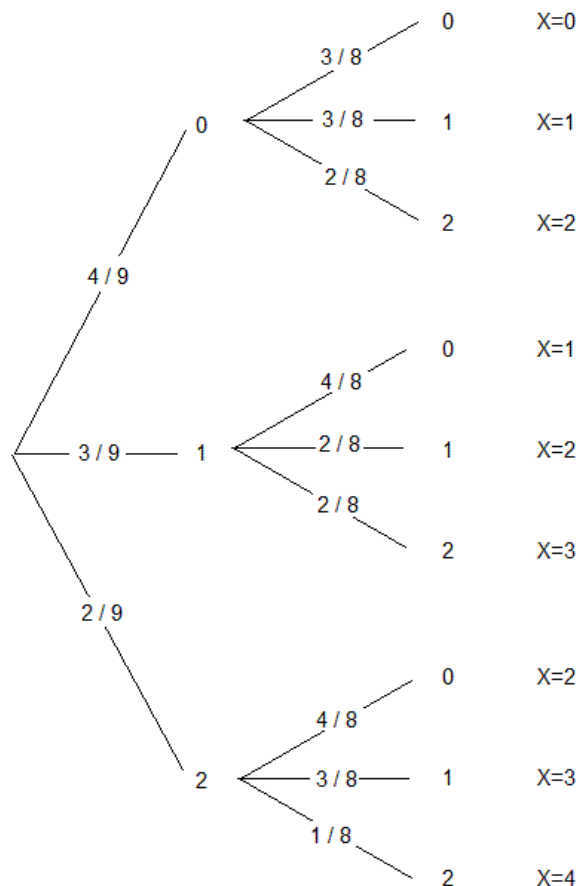
- la loi faible des grands nombres.
- le théorème de la limite centrée.

Correction

## EXERCICE 1

$X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

Ci-dessous, l'arbre associé à cette expérience:



$$\text{donc : } p(X = 0) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 1) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(X = 2) = \frac{4}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9} + \frac{1}{12} = \frac{8}{36} + \frac{3}{36} = \frac{11}{36}$$

$$p(X = 3) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 4) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{36}$$

et on peut vérifier que :

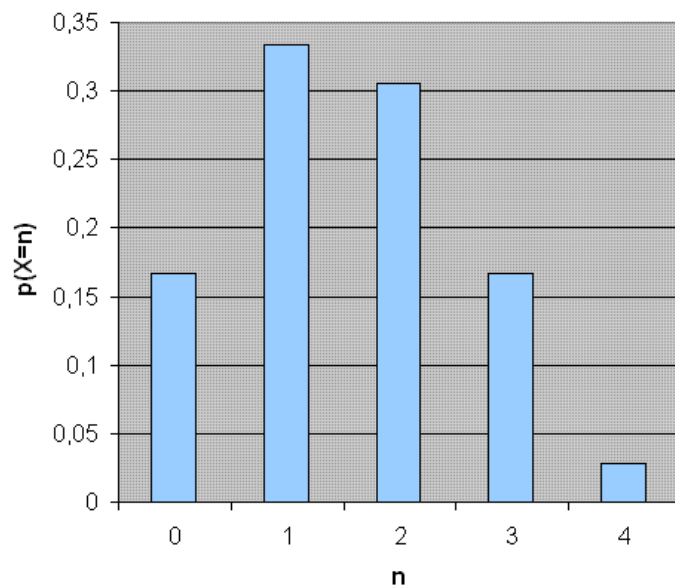
$$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{11}{36} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36}$$

$$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) = \frac{6 + 12 + 11 + 6 + 1}{36}$$

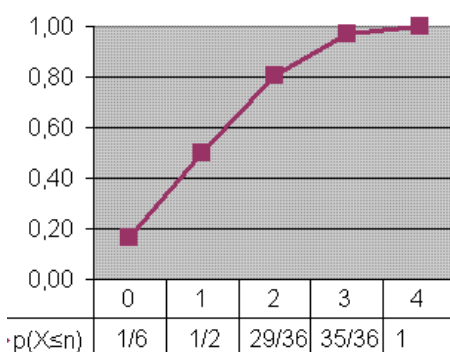
$$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) = \frac{36}{36}$$

$$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) = 1.$$

Représentation graphique de la loi de probabilité de X :



Courbe représentative de la fonction de répartition :



## EXERCICE 2

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ .

Par construction, on a  $(X \leq a) \cup (a < X \leq b) = (X \leq b)$  et  $(X \leq a) \cap (a < X \leq b) = \emptyset$

donc  $p(X \leq b) = p((X \leq a) \cup (a < X \leq b))$

$p(X \leq b) = p(X \leq a) + p(a < X \leq b) - p((X \leq a) \cap (a < X \leq b))$

$p(X \leq b) = p(X \leq a) + p(a < X \leq b) - p(\emptyset)$

$p(X \leq b) = p(X \leq a) + p(a < X \leq b)$

d'où  $p(a < X \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a)$

## EXERCICE 3

L'espérance mathématique de la variable aléatoire  $Y$  est la moyenne des valeurs possibles de  $Y$  pondérées par leur probabilité:  $E(Y) = \sum_{i=1}^n p_i y_i$  où les  $y_i$  sont les valeurs possibles de  $Y$  et les  $p_i$  leur probabilité.

Il faut donc commencer par déterminer la loi de probabilité de  $Y$ .

$Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Ce tableau donne la valeur obtenue pour  $Y$  en fonction des valeurs des 2 dés:

| X \ Y | -2      | -1      | 0      | 1       | 2       |
|-------|---------|---------|--------|---------|---------|
| -1    | 2 0,02  | 1 0,04  | 0 0,08 | -1 0,04 | -2 0,02 |
| 0     | 0 0,06  | 0 0,04  | 0 0,3  | 0 0,07  | 0 0,03  |
| 1     | -2 0,02 | -1 0,12 | 0 0,02 | 1 0,09  | 2 0,05  |

Les tirages sont équiprobables, toutes les cases du tableau ont donc la même pondération :  $\frac{1}{36}$ .

On en déduit la loi de probabilité de  $Y$ :

$$p_2 = p_{12} = \frac{1}{36}; p_3 = p_{11} = \frac{2}{36}; p_4 = p_{10} = \frac{3}{36}; p_5 = p_9 = \frac{4}{36}; p_6 = p_8 = \frac{5}{36}; p_7 = \frac{6}{36};$$

$$\text{D'où: } E(Y) = \frac{2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5 + 7 \times 6 + 8 \times 5 + 9 \times 4 + 10 \times 3 + 11 \times 2 + 12 \times 1}{36}$$

$$E(Y) = \frac{2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12}{36}$$

$$E(Y) = \frac{252}{36}$$

$$E(Y) = 7$$

## EXERCICE 4

La variance représente la moyenne des carrés des écarts à la moyenne: elle permet de caractériser, tout comme l'écart-type, la dispersion des valeurs  $x_i$

par rapport à la moyenne  $E(X)$ :  $V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$

L'écart-type est la racine carrée de la variance:  $\sigma_x = \sqrt{V(x)}$

## EXERCICE 5

► Si on ajoute  $\alpha$  à toutes les valeurs de  $X$ , alors sa moyenne est augmentée de  $\alpha$  mais les écarts des valeurs de  $X$  à la moyenne restent inchangés :

$$E(X + \alpha) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i + \alpha) = \sum_{i=1}^n p_i x_i + \sum_{i=1}^n p_i \alpha = \sum_{i=1}^n p_i x_i + \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \alpha = E(X) + \alpha$$

donc :  $E(X + \alpha) = E(X) + \alpha, (\alpha \in \mathbb{R})$

$$V(X + \alpha) = E((X + \alpha - E(X + \alpha))^2) = E((X + \alpha - (E(X) + \alpha))^2) = E((X - E(X))^2) = V(X)$$

donc :  $V(X + \alpha) = V(X), (\alpha \in \mathbb{R})$

► De même, si on enlève  $\alpha$  à toutes les valeurs de  $X$ ,

$$E(X - \alpha) = E(X) - \alpha, (\alpha \in \mathbb{R}) \text{ et } V(X - \alpha) = V(X), (\alpha \in \mathbb{R})$$

Si on multiplie toutes les valeurs de  $X$  par  $k$ , alors sa moyenne sera multipliée par  $k$ , ainsi que les écarts des valeurs à la moyenne:

$$E(kX) = \sum_{i=1}^n p_i (kx_i) = k \sum_{i=1}^n p_i x_i = kE(X)$$

donc :  $E(kX) = kE(X), (k \in \mathbb{R})$

$$V(kX) = E((kX - E(kX))^2) = E((kX - kE(X))^2) = E((k(X - E(X)))^2) = E(k^2(X - E(X))^2) = k^2 E((X - E(X))^2) = k^2 V(X)$$

donc :  $V(kX) = k^2 V(X), (k \in \mathbb{R})$

## EXERCICE 6

1. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev:  $p(|X - E(X)| > 2) < \frac{V(X)}{2^2}$

Or pour cette expérience équiprobable  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$  donc  $E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$  et

$$E(X^2) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6} \text{ donc, d'après le théorème de König,}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}$$

$$\text{donc } \frac{V(X)}{4} = \frac{35}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{35}{48}$$

$$\text{d'où } p(|X - E(X)| > 2) < \frac{35}{48}$$

2. Ci-dessous le tableau des valeurs de  $|X - E(X)|$  en fonction des valeurs de  $X$  :

| X | $X - E(X)$ | $ X - E(X) $ |
|---|------------|--------------|
| 1 | -2,5       | 2,5          |
| 2 | -1,5       | 1,5          |
| 3 | -0,5       | 0,5          |
| 4 | 0,5        | 0,5          |
| 5 | 1,5        | 1,5          |
| 6 | 2,5        | 2,5          |

$|X - E(X)|$  est donc strictement supérieur à 2 dans deux cas sur six :

$$p(|X - E(X)| > 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

On a bien  $\frac{1}{3} < \frac{35}{48}$  mais ce majorant est plutôt éloigné (plus de 2 fois supérieur).

## EXERCICE 7

1. Loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  :

Une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  est une expérience aléatoire à 2 issues possibles, dénommées "succès" et "échec", et pour laquelle la probabilité

de succès est  $p$  et celle de l'échec est  $q = 1 - p$ .

Si on renouvelle  $n$  fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ , alors la variable aléatoire  $X$  correspondant au nombre de succès obtenus à l'issue de ces  $n$  épreuves suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

où  $\binom{n}{k}$  est appelé coefficient binomial et se calcule à l'aide de factorielles:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

On a alors:  $E(X) = np$ ;  $V(x) = npq$  et  $\sigma_x = \sqrt{npq}$ .

### 2. Loi de Poisson de paramètre $\lambda$ :

Soit  $\lambda$  un réel strictement positif et  $X$  une variable aléatoire.

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre lorsque :

► l'ensemble des valeurs prises par  $X$  est  $\mathbb{N}$

►  $\forall k \in \mathbb{N}, p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

On a alors:  $E(X) = \sigma_x(X) = \sqrt{\lambda}$

### 3. Loi normale de paramètres $m$ et $\sigma$ :

Soit  $X$  une variable aléatoire continue, c'est-à-dire telle qu'il existe une fonction  $f$  (appelée densité de probabilité) vérifiant:

►  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

►  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

►  $\forall t \in \mathbb{R}, p(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$

La variable aléatoire continue  $X$  suit une loi normale de paramètres  $m$  et  $\sigma$  notée  $N(m, \sigma)$  si :

► l'ensemble des valeurs prises par  $X$  est  $\mathbb{R}$

► la densité de probabilité de  $X$  est  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$

La loi normale centrée réduite est la loi normale de paramètres  $m = 0$  et  $\sigma = 1$ .

Si la variable aléatoire  $X$  suit une loi normale de paramètres  $m$  et  $\sigma$ , alors la variable aléatoire  $X_* = \frac{X - m}{\sigma}$  suit une loi normale centrée réduite.

Si  $X$  suit une loi  $N(m, \sigma)$  et  $Y$  suit une loi  $N(m', \sigma')$  alors :

► pour tous réels  $a$  et  $b$  ( $a \neq 0$ ),  $aX + b$  suit une loi  $N(am + b, |a|\sigma)$

► si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $X + Y$  suit une loi  $N(m + m', \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$

► si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $X - Y$  suit une loi  $N(m - m', \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$

## EXERCICE 8

1. On peut considérer qu'il s'agit d'épreuves de Bernoulli, indépendantes, dont la probabilité de succès ("tomber en panne") est  $p$ , renouvelées 2 fois pour B et 4 fois pour Q.

Alors  $X$  suit une loi binomiale de paramètres 2 et  $p$ :  $\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, p(X = k) = \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k} = \frac{2!}{k!(2-k)!} p^k (1-p)^{2-k}$

donc:  $p(X = 0) = (1-p)^2$ ;  $p(X = 1) = 2p(1-p)$ ;  $p(X = 2) = p^2$ .

Et  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres 4 et  $p$ :  $\forall k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, p(X = k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k} = \frac{4!}{k!(4-k)!} p^k (1-p)^{4-k}$

donc:  $p(Y = 0) = (1-p)^4$ ;  $p(Y = 1) = 4p(1-p)^3$ ;  $p(Y = 2) = 6p^2(1-p)^2$ ;  $p(Y = 3) = 4p^3(1-p)$ ;  $p(Y = 4) = p^4$ .

2.  $P_B = p(X = 0) + p(X = 1) = 1 - p(X = 2) = 1 - p^2$

$P_Q = p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2) = 1 - p(Y = 3) - p(Y = 4) = 1 - p^4 - 4p^3(1-p) = 1 - p^4 - 4p^3 + 4p^4 = 1 - 4p^3 + 3p^4$

Étudions le signe de  $P_Q - P_B = 3p^4 - 4p^3 + 1 - (1 - p^2) = 3p^4 - 4p^3 + p^2 = p^2(3p^2 - 4p + 1)$  du signe de  $3p^2 - 4p + 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4$$

$$p_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 2}{6} = -\frac{2}{3} \text{ et } p_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 2}{6} = -\frac{1}{3}$$

► pour  $0 \leq p \leq \frac{1}{3}$ :  $P_Q - P_B \geq 0$ ;  $P_Q \geq P_B$ . Le vol Q offre la meilleure sécurité.

► pour  $\frac{1}{3} \leq p \leq 1$ :  $P_Q - P_B \leq 0$ ;  $P_Q \leq P_B$ . Le vol B offre la meilleure sécurité.

## EXERCICE 9

Soit l'épreuve de Bernoulli "tirage d'un appareil défectueux", dont la probabilité de succès est  $p = \frac{5}{1000}$ .

On prélève 80 appareils de manière indépendante: on réalise donc une succession de 80 épreuves de Bernoulli de paramètre  $p$ . La variable aléatoire  $X$  désignant le nombre de succès (nombre d'appareils défectueux) suit donc une loi binomiale de paramètres 80 et  $\frac{5}{1000}$ :

$$\text{pour tout entier } k \text{ entre 0 et 80: } p(X = k) = \binom{80}{k} \left(\frac{5}{1000}\right)^k \left(\frac{995}{1000}\right)^{80-k} = \frac{80!}{k!(80-k)!} \left(\frac{5}{1000}\right)^k \left(\frac{995}{1000}\right)^{80-k}$$

Or, si  $n > 30$  et  $np < 5$ , on peut approximer la loi binomiale par la loi de Poisson

Ici,  $n = 80 > 30$  et  $np = \frac{80 \times 5}{1000} = \frac{400}{1000} = 0.4 < 5$  donc on peut approximer la loi binomiale et considérer que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $np=0.4$ .  
Alors:

$$1. p(X=0) = e^{-0.4} \frac{0.4^0}{0!} = e^{-0.4} = 0.6703 = 67.03\%$$

$$2. p(X=2) = e^{-0.4} \frac{0.4^2}{2!} = 0.6703 \frac{0.4^2}{2} = 0.0536 = 5.36\%$$

$$3. p(X \geq 2) = 1 - p(X=1) - p(X=0)$$

$$\text{avec } p(X=0) = 67.03\% \text{ et } p(X=1) = e^{-0.4} \frac{0.4}{1!} = 0.6703 * 0.4 = 0.2681 = 26.81\%$$

$$\text{donc } p(X \geq 2) = 1 - 0.6703 - 0.2681 = 0.0616 = 6.16\%$$

$$4. p(X \leq 5) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5)$$

$$\text{avec } p(X=0) = 67.03\% \text{ et } p(X=1) = 26.81\% \text{ et } p(X=2) = 5.36\%$$

$$\text{et } p(X=3) = e^{-0.4} \frac{0.4^3}{3!} = 0.6703 \frac{0.4^3}{6} = 0.0071 = 0.71\%$$

$$\text{et } p(X=4) = e^{-0.4} \frac{0.4^4}{4!} = 0.6703 \frac{0.4^4}{24} = 0.0007 = 0.07\%$$

$$\text{et } p(X=5) = e^{-0.4} \frac{0.4^5}{5!} = 0.6703 \frac{0.4^5}{120} = 0.0000572 = 0.005\%$$

$$\text{donc } p(X \leq 5) = 0.6703 + 0.2681 + 0.0536 + 0.0071 + 0.0007 + 0.00005 = 0.9998 = 99.98\%$$

## EXERCICE 10

1.  $X$  suit une loi  $N(3,12)$  donc  $X^* = \frac{X-3}{\sqrt{12}}$  suit une loi  $N(0,1)$ .

$$X > x \iff 12X^* + 3 > x \iff X^* > \frac{x-3}{\sqrt{12}} = x^*$$

$$\text{donc } p(X > x) = 0.6255 \iff p(X^* > x^*) = 0.6255 \iff p(X^* \leq x^*) = 1 - 0.6255 = 0.3745$$

On peut alors lire la valeur de  $x^*$  correspondante sur une table de la loi normale centrée réduite, en sachant que trouver  $x^*$  revient à trouver  $-x^*$  correspondant à  $1 - 0.3745 = 0.6255$ :

|     | 0      | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0   | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7793 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1   | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8906 | 0,8925 | 0,8943 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2   | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |

On a donc  $-x^* = 0.32$  donc  $x^* = -0.32$  donc  $x = 12x^* + 3 = 12(-0.32) + 3 = -0.68$

On a alors  $p(X > -0.68) = 0.6255$

$$2. p(3,25 < 4,75) = p(0.02083 < 0.14583) = p(X^* < 0.14583) - p(X^* < 0.02083)$$

On lit dans le tableau précédent les valeurs qui correspondent (en approximant, par exemple pour 0.1458 on prend la moyenne des valeurs pour 0.14 et 0.15):

$$p(X^* < 0.14583) - p(X^* < 0.02083) = 0.5576 - 0.508 = 0.0496 = 4.96\%$$

donc  $p(3.25 < 4,75) = 4.96\%$ .

## EXERCICE 11

1.  $X$  suit une loi normale de paramètres 462 et  $\sqrt{2.89} = 1.7$  donc  $X^* = \frac{X-462}{1.7}$  suit la loi normale centrée réduite.

$$p(X < 465.06) = p(X^* < \frac{465.06 - 462}{1.7}) = p(X^* < 1.8)$$

or on lit dans la table de la loi normale centrée réduite:  $p(X^* < 1.8) = 0.9641$

donc  $p(X < 465.06) = 96.41\%$

$$2. p(X > 463.99) = p(X^* > \frac{463.99 - 462}{1.7}) = p(X^* > 1.17) = 1 - p(X^* < 1.17)$$

or on lit dans la table:  $p(X^* < 1.17) = 0.8790$

donc  $p(X > 463.99) = 1 - 0.8790 = 0.1210 = 12.10\%$

## EXERCICE 12

1. Pour X :

$$p(X = -1) = 0.02 + 0.04 + 0.08 + 0.04 + 0.02 = 0.20$$

$$p(X = 0) = 0.06 + 0.04 + 0.30 + 0.07 + 0.03 = 0.50$$

$$p(X = 1) = 0.02 + 0.12 + 0.02 + 0.09 + 0.05 = 0.30$$

Pour Y :

$$p(Y = -2) = 0.02 + 0.06 + 0.02 = 0.10$$

$$p(Y = -1) = 0.04 + 0.04 + 0.12 = 0.20$$

$$p(Y = 0) = 0.08 + 0.30 + 0.02 = 0.40$$

$$p(Y = 1) = 0.04 + 0.07 + 0.09 = 0.20$$

$$p(Y = 2) = 0.02 + 0.03 + 0.05 = 0.10$$

$$2. p((X = 0) \cap (Y = -2)) = 0.06 \text{ et } p(X = 0)p(Y = -2) = 0.50 \times 0.10 = 0.05$$

donc  $p((X = 0) \cap (Y = -2)) \neq p(X = 0)p(Y = -2)$  donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

$$3. p(X + Y = 0) = p((X = -1) \cap (Y = 1)) + p((X = 0) \cap (Y = 0)) + p((X = 1) \cap (Y = -1)) = 0.04 + 0.30 + 0.12 = 0.46$$

4. Dans ce tableau, pour chaque colonne, la première sous-colonne représente la valeur de XY et la deuxième reprend la probabilité associée:

| X \ Y | -2      | -1      | 0      | 1       | 2       |
|-------|---------|---------|--------|---------|---------|
| -1    | 2 0,02  | 1 0,04  | 0 0,08 | -1 0,04 | -2 0,02 |
| 0     | 0 0,06  | 0 0,04  | 0 0,30 | 0 0,07  | 0 0,03  |
| 1     | -2 0,02 | -1 0,12 | 0 0,02 | 1 0,09  | 2 0,05  |

$$\text{donc } p(XY = -2) = 0.02 + 0.02 = 0.04$$

$$p(XY = -1) = 0.04 + 0.12 = 0.16$$

$$p(XY = 0) = 0.06 + 0.04 + 0.08 + 0.30 + 0.07 + 0.03 + 0.02 = 0.60$$

$$p(XY = 1) = 0.04 + 0.09 = 0.13$$

$$p(XY = 2) = 0.02 + 0.05 = 0.07$$

## EXERCICE 13

1. Loi faible des grands nombres :

Si on considère n variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé, ayant même variance finie et même espérance  $E(X)$ , la loi faible des grands nombres stipule que,

pour tout réel  $\epsilon$ ,  $Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$  tend vers 0 pour les grandes valeurs de n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E(X)\right| \geq \epsilon\right) = 0$$

2. Théorème de la limite centrée :

Soit une suite  $(X_n)$  de variables aléatoires indépendantes toutes de même loi et admettant pour espérance m et pour écart-type  $\sigma$  (différent de 0).

Alors l'espérance de  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  est nm et son écart-type  $\sigma\sqrt{n}$  et la loi  $S_n$  tend vers la loi normale  $N(nm, \sigma^2 n)$  quand n tend vers l'infini.