

2 pages

II. VA à deux dimensions

1. Définitions

• Va discrètes :

Loi de probabilité jointe vaut :

$$P(X = x, Y = y) = P[\{\omega / X(\omega) = x \text{ et } Y(\omega) = y\}]$$

Remarques-propriétés :

- Présentation sous forme d'un tableau.
- $0 \leq P(X = x, Y = y) \leq 1$
- C.N. : $\sum_x \sum_y P(X = x, Y = y) = 1$
- Lois marginales

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$$

• Va continues : densité de probabilité jointe

Soient X et Y deux va continues qui prennent des valeurs sur un domaine D du plan.

La densité de probabilité jointe $f(x,y)$ est définie par

$$P(x < X < x+dx, y < Y < y+dy) = f(x,y) dx dy$$

Remarques-propriétés :

- $f(x, y) \geq 0$
- $\iint_D f(x, y) dx dy = 1$
- Lois marginales

$$f_X(x) = \int_{y1}^{y2} f(x, y) dy \text{ et } f_Y(y) = \int_{x1}^{x2} f(x, y) dx$$

• Fonction de répartition :

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y)$$

2. Va indépendantes

X et Y indépendantes si $P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$ ou $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$

3. Fonctions de va

- Définition :

X et Y deux va et $h(X, Y)$ fonction de X et Y, alors $h(X, Y)$ est aussi une va

- Espérance de $h(X, Y)$:

$$E[h(X, Y)] = \sum_x \sum_y h(x, y) P(X = x, Y = y)$$

$$E[h(X, Y)] = \iint_D h(x, y) f(x, y) dx dy$$

- Exemples fondamentaux :

- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- Si X et Y indépendants alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

- Variance de $h(X, Y)$:

$$\text{Var}[h(X, Y)] = E[h^2(X, Y)] - (E[h(X, Y)])^2$$

- Exemples fondamentaux :

- $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab[E(XY) - E(X)E(Y)]$
- Si X et Y indépendants alors $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y)$

4. Covariance et coefficient de corrélation

- Covariance:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Propriété :

Si X et Y indépendants alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Application :

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$$

- Coefficient de corrélation :

$$\rho = \text{Cov}(X, Y) / \sigma_X \sigma_Y$$