

Espace probabilisé

- * expérience aléatoire : épreuve répétée dans les mêmes conditions mais qui ne donne pas tjrs le même résultat
- * ensemble fondamental Ω : ensemble des épreuves, des résultats possibles
- * événement : ce qui peut arriver suite à l'expérience généralement sous ensemble de Ω
- * $A^c = \bar{A}$ = complémentaire de A
- * $A \setminus B$ = A moins B
- * $\emptyset$ = événement impossible
- * Ω = evt certain
- * $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{sauf si } A \text{ et } B \text{ disjoints}}$
- * $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- * formule générale de Poincaré : $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$
- * proba conditionnelle de A sachant B : $P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- * théorème de multiplication : $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$
 $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|(B \cap A))$
- * formule des probabilités totales
 Soit un ensemble de n évs disjoints A_i tels que $\bigcup A_i = \Omega$ et B un evt quelconque

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$$
- * Formule de Bayes : $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)}$

Espace probabilisé

- * expérience aléatoire : épreuve répétée dans les mêmes conditions mais qui ne donne pas tjrs le même résultat
- * ensemble fondamental Ω : ensemble des épreuves, des résultats possibles
- * événement : ce qui peut arriver suite à l'expérience généralement sous ensemble de Ω
- * $A^c = \bar{A}$ = complémentaire de A
- * $A \setminus B = A$ moins B
- * $\emptyset$ = événement impossible
- * Ω = evt certain
- * $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{sauf si } A \text{ et } B \text{ disjoints}}$
- * $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- * formule générale de Poincaré : $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$
- * proba conditionnelle de A sachant B : $P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- * théorème de multiplication : $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$
 $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|(B \cap A))$
- * formule des probabilités totales
 Soit un ensemble de n évs disjoints A_i tels que $\bigcup A_i = \Omega$ et B un evt quelconque
 $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$
- * Formule de Bayes : $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)}$

Lois continues

* Loi uniforme sur $[a, b]$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

* Loi exponentielle

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

* Loi normale (loi de Gauss) $N(m, \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad E(X) = m \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$$

* fonction de v.a.c

Soit X et $f(x)$

$Y = h(X)$ et $g(Y)$

si h bijective, alors $f(x)|dx| = g(y)|dy|$

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

$\underbrace{\quad}_{\text{la dériver } h^{-1}(y \rightarrow x)}$

Lois discrètes

* Loi uniforme sur $[[n_1, n_2]]$, n éléments

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \\ = \frac{1}{n}$$

$$E(X) = \frac{n_1 + n_2}{2}$$

$$\text{Var}(X) =$$

* Loi de Bernoulli (2 résultats possibles)

$$P(X = k) = p$$

$$E(X) = p$$

$$\text{Var}(X) = p(1-p)$$

* Loi Binomiale $B(N, p)$ (

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad E(X) = Np$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$

* Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

formule de Stirling : $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

Dénombrement

* Principe fondamental de comptage :

expérience à p étapes successives et indépendantes avec $n_1, n_2, \dots, n_p$ résultats possibles. $N = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$

* Permutation : façon de ranger n objets dans un ordre donné

permutations sans répétition (objets discernables) $N = n!$

permutations avec répétitions avec $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ objets (~~non~~ discernables)

$$N = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \gamma!}$$

* Arrangement : tirage de p objets parmi n ($n > p$)

$$N = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} = A_n^p$$

* Combinaison : tirage de p objets parmi n sans tenir compte de l'ordre

$$N = \frac{\text{nb d'arrangements}}{\text{nb de permutations de } p \text{ objets}}$$

$$N = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$$

Somme des termes d'une suite arithmétique : $\Sigma = \frac{(\text{premier} + \text{dernier}) \times \text{nb de termes}}{2} = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme des termes d'une suite géométrique : $\Sigma = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}$

$$= u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Variables aléatoires

VAD	VAC
$P(X = x_i)$	densité de probabilité $f(x_i)dx = P(x_i \leq X \leq x_i + dx)$
fonction de répartition $P(X \leq x_i)$	fonction de répartition $F(x) = P(X < x) = \int_a^x f(t) dt$

* Loi exponentielle :

- densité de proba: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \forall x \geq 0$
 $f(x) = 0 \quad \forall x < 0$

- fonction de répartition: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \forall x \geq 0$
 $F(x) = 0 \quad \forall x < 0$

$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

* Loi de Gauss (ou Normale)

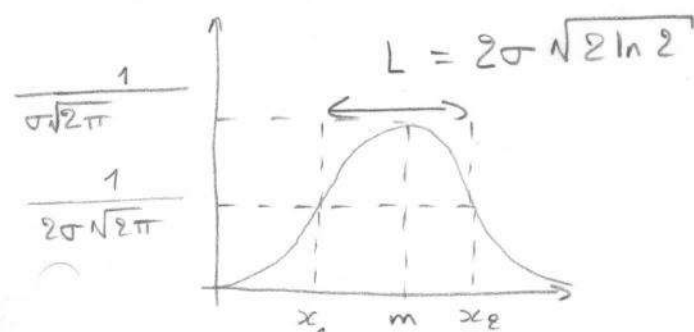
- densité de proba: $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

- $N(m, \sigma^2)$
 $\begin{matrix} \text{↳ écart type} \\ \text{↳ moyenne} \end{matrix}$

$E(X) = m \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$

- variables $m=0$ et $\sigma=1$: loi normale centrée et réduite

$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$



* fonction du v.a. $\mathbb{C}$

Soit X et $f(x)$

soit $Y = h(X)$ et $g(Y)$

Si h bijective, alors $f(x)|dx| = g(y)|dy|$ donc $g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$

deriver $h^{-1}(y \rightarrow x)$

Variables aléatoires continues

Soit une v.a.c de $\Omega \rightarrow [a; b] \in \mathbb{R}$ et $\omega \rightarrow X(\omega)$

soit $x_0 \in [a; b]$ et $P(X = x_0) = 0$

la proba que $x_0 \leq X \leq x_0 + dx$ s'écrit $f(x_0)dx$

la fonction qui a $x_0 \rightarrow f(x_0)$ est la densité de probabilité

$f(x_0) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$ car $f(x)dx$ est une densité de proba
 $f(x)$ a la dimension de $\frac{1}{\text{dimension de } dx}$

$P(X = x_0) = 0$ donc $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = \dots$

$$P(a < X < b) = 1 = \int_a^b f(x) dx$$

fonction de répartition: $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty \text{ ou } a}^x f(t) dt$

$$F'(x) = f(x) \rightarrow \text{densité de proba}$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

F croissante de 0 à 1

loi uniforme: $f(x) = \text{cst sur } [a; b]$

$$f(x) = \int_a^b C dx = C \int_a^b dx = C(b-a) \Big|_{=1} \Rightarrow C = \frac{1}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(x)dx = \frac{1}{b-a}$$

fonction de répartition en uniforme:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$\text{en uniforme, } F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

densité de loi
uniforme

Variables aléatoires
discrètes

VAD :

* Loi de probabilité X est l'ensemble des probas $P(X=x_i)$ ou $P(\{\omega \text{ tq } X(\omega) = x_i\})$ satisfait
$$\begin{cases} 0 \leq P(X=x_i) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^n P(X=x_i) = 1 \end{cases}$$
 : condition de normalisation* fonction de répartition : $p(x) = P(X \leq x)$ (peu utilisée)* loi de probabilité uniforme : $\forall i, P(X=x_i) = \frac{1}{n}$ * loi Binomiale : N réalisations successives et indépendantes qui mènent au succès ou à l'échec, $X = \text{nb de succès}$ $B(N; p)$ ↳ probabilité du succès
 $q = 1 - p = \text{probabilité de l'échec}$

$$P(X=k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$$

$$E(X) = Np$$

$$\text{Var}(X) = npq$$

* loi de Poisson : loi binomiale avec $N \rightarrow \infty$ et $p \rightarrow 0$

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad \text{avec } \lambda = Np$$

Pour la démonstration, formule de Stirling : $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

$$E(X) = \lambda$$

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

Espérance

espérance = moyenne d'une variable aléatoire

analogie $\bar{x} = \sum x_i f_i$
discret : $E(X) = \sum x_i P(X=x_i)$

continu : $E(X) = \int_a^b x f(x) dx$

Pour une loi Binomiale, $E(X) = np$

loi de Poisson, $E(X) = \lambda$ (sachant que $\lambda = np$)

Pour une loi exponentielle, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

loi uniforme (v.a.c), $E(X) = \frac{a+b}{2}$
sur $[a; b]$

Espérance

cas discret : $E(X) = \sum_i x_i P(X=x_i)$

cas continu : $E(X) = \int_a^b x f(x) dx$

Propriété :

$$E(h(X)) = \sum_i h(x_i) P(X=x_i) \quad \text{v.a.d}$$

$$E(h(X)) = \int_a^b h(x) f(x) dx \quad \text{v.a.c}$$

et $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$ si α et β cst

Exemples :

v.a.d

uniforme : $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Binomiale : $E(X) = np$

Poisson : $E(X) = \lambda$

v.a.c

Exponentielle : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Gauss : $E(X) = m$

uniforme : $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Variance

cas discret : $\text{Var}(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 P(X=x)$

cas continu : $\text{Var}(X) = \int_a^b [x - E(X)]^2 f(x) dx$

Général : $\sigma_x^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E[(X - E(X))^2]$

Si $\text{Var}(X) \searrow$, les valeurs se rapprochent de $E(X)$

Si X_1 et X_2 indépendants, $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ et $\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2)$

Exemples :

v.a.d

Binomiale : $\text{Var}(X) = npq$

Poisson : $\text{Var}(X) = \lambda$ ✓

v.a.c

uniforme : $\text{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$

exponentielle : $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

gauss : $\text{Var}(X) = \sigma^2$

$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$

Moment

moment d'ordre n d'une v.a. :

$$E(X^n) = \sum_x x^n P(X=x) \quad \Bigg/ \quad \int_a^b x^n f(x) dx$$

ordre 1 : $E(X)$

ordre 2 : $\text{Var}(X)$

si $E(X) = 0$ variable d'entrée