

PROBABILITES L2

Plan du cours :

Chapitre 1 : Espaces probabilisés	2
I/ Ensemble fondamental – Evenement	2
II/ Définition d'une fonction probabilité :	5
1) Fonction probabilité	5
2) Méthode pratique pour définir la fonction probabilité p	6
III/ Probabilité conditionnelle et indépendance	8
a) Probabilité conditionnelle	8
b) Evénement indépendants	8
c) Théorème de la multiplication	8
d) Formule des probabilités totales	9
e) Formule de Bayes	9
IV/ Technique de comptage	11
1) Principe fondamental de comptage	11
2) Permutations	11
3) Arrangements	13
4) Combinaisons	13
5) Formules	14
6) Utilisation d'un arbre	14
Chapitre 2 : Variables aléatoires	15
I/ Variables aléatoires à une dimension	15
1) Définition et exemples	15
2) Loi de probabilité	16
3) Lois de probabilités les plus connues	20
4) Fonction d'une variable aléatoire	26
5) Espérance mathématique	29
6) Variances et moments	33
II/ Variables aléatoires à deux dimension	37
1) Exemples et définitions	37
2) V.a. indépendantes	41
3) Fonction de v.a.	43
4) Covariance et coefficient de corrélation	46

Chapitre 1 : Espaces probabilisés

I/ Ensemble fondamental – Evenement

Expérience aléatoire :

Expérience qui, répétée dans les mêmes conditions, ne donne pas toujours le même résultat.

Ex :

- Tirer une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes
- Compter le nombre de particules émises entre les instants 0 et t
- Noter la distance entre le point d'impact d'une fléchette et le centre d'une cible

Ensemble fondamental ou ensemble des épreuves :

Noté Ω Cela correspond à l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.

Ex :

- $\Omega = \{As, P, AS, T... 2P, 2T, 2C, 2C\}$
- $\Omega = \{0, 1, 2, 3... \infty\}$
- $\Omega = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq \text{Rayon}\}$

NB :

Il est à noter que Ω est de dimension finie ou infinie :

- dénombrable (cas des particules)
- indénombrables (cas de la cible)

Evénement :

C'est un sous-ensemble de Ω . Notion fondamentale en termes de probabilités

Exemples :

- Evénement A = « tirer une carte de la couleur pique »
= $\{AsP, RP, DP, ..., 2P\}$
- Evénement B = « compter un nombre pair de particules »
- Evénement C = « approcher le centre de moins de Rayon/2 »

NB :

A partir d'un événement, on peut définir d'autres événements

Complémentaire :

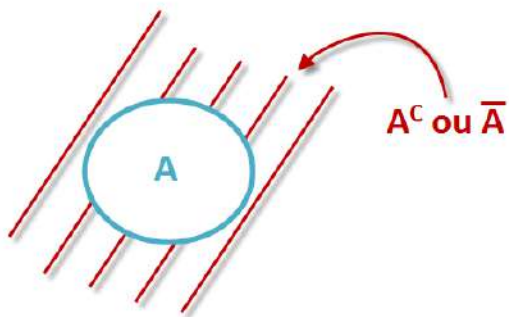
Notation : A^c ou $\bar{A}$

Avec l'exemple du jeu de cartes :

A = « cartes piquées »

Donc A^c ou $\bar{A}$ = {39 cartes autres que le pique}

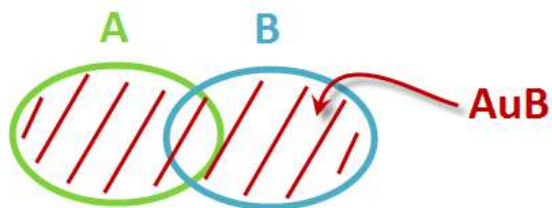
Représentation :



Union :

Notation : $A \cup B$ = l'événement A OU l'événement B se réalise (ou n'est pas exclusif)

Représentation :



Ex :

Jeu de 52 cartes :

Si B = « tirer un as » = {AsP, AsK, AsC, AsT}

donc $A \cup B$ = {B cartes piquées, AsK, AsC, AsT}

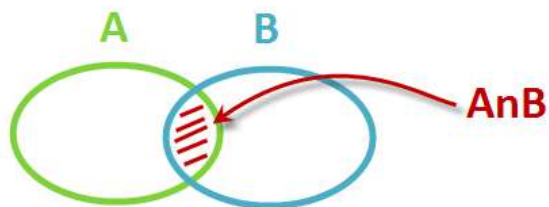
Intersection :

Notation : $A \cap B$ = l'événement A ET l'événement B sont réalisés

Ex :

Jeu de cartes : $A \cap B$ = {AsP}

Représentation :

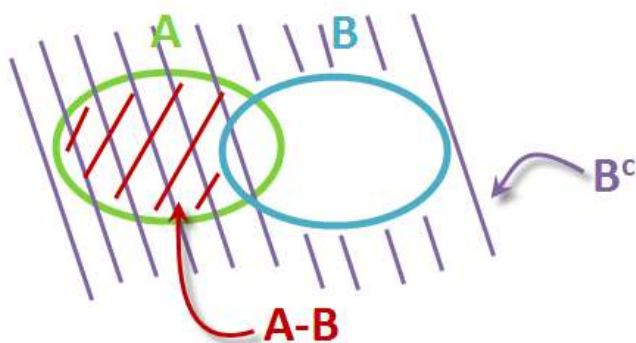


Événement (A-B):

Notation: $A \setminus B$

Ex :

$$A \setminus B = \{RP, DP, \dots 2P\}$$



On peut dire que $A \setminus B = A \cap B^c$

Ensemble vide : $\emptyset$ = événement impossible

Ensemble fondamental : Ω = événement certain

Un événement par ex, « tirer un as », est couramment assimilé au sous-ensemble $B = \{AsP, AsC, AsK, AsT\}$

NB :

Il est possible d'effectuer les raisonnements avec :

- Des dessins (cf au dessus)
- Les lois de la théorie des ensembles :

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Commutativité : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$

Distributivité : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Identité : $A \cup \emptyset = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$

$$A \cup \Omega = \Omega \quad A \cap \Omega = A$$

Complémentarité : $A \cup A^c = \Omega$ $A \cap A^c = \emptyset$
 $(A^c)^c = A$ $\emptyset^c = \Omega$ $\Omega^c = \emptyset$

II/ Définition d'une fonction probabilité :

1) Fonction probabilité

Avant d'effectuer une expérience, on ne sait pas si l'événement A sera réalisé ou non.
La donnée d'une probabilité permet de mesurer les chances pour que A se réalise.

a) Définition :

Soit une expérience Ω son ensemble fondamental et $\mathcal{a}$ l'ensemble des événements. p est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{a})$ si l'application $p : \mathcal{a} \rightarrow [0,1]$ vérifie :

$$A \rightarrow p(A)$$

- 1) $p(\Omega) = 1$
- 2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$)
- 3) $p(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$ pour les événements disjoints 2 à 2.

b) Propriétés

- 1) $P(\emptyset) = 0$
- 2) $P(A^c) = 1 - P(A)$
On a $A \cup A^c = \Omega$ donc $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$
Or A et A^c sont disjoints donc $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$ donc $P(A^c) = 1 - P(A)$
- 3) Pour A et B quelconques : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Démonstration :

On a $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ or $A \setminus B$ et B sont disjoints donc $P(A \cup B) = P(A \setminus B) \cup B = P(A \setminus B) + P(B)$
 $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

c) Exemple :

Jeu de 52 cartes.

Soit l'événement = « tirer une carte donnée » **(1)**

Dans l'ensemble fondamental Ω , on a 52 événements dits élémentaires disjoints.

Or $P(\Omega) = 1$ = somme des proba de chaque événement

donc $P(\Omega) = 1 = 52 * \text{proba d'une carte donnée} \Rightarrow P(\text{tirer une carte donnée}) = \frac{1}{52} = \text{proba de l'événement élémentaire}$

On veut la probabilité de tirer un As :

Événement = « Tirer un As » = {AsK ou AsT ou AsC ou AsP} **(2)**

$= \{AsK\} \cup \{AsT\} \cup \{AsC\} \cup \{AsP\}$

$P(\text{Tirer un As}) = P(\{AsK\} \cup \{AsT\} \cup \{AsC\} \cup \{AsP\})$ événements disjoints

$$= P(AsK) + P(AsT) + P(AsC) + P(AsP) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{4}{52}$$

On remarque que : $P(\text{Tirer un As}) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Valable si événements équiprobables

D'où la démarche suivante en 3 étapes :

- 1) Décrire l'expérience avec des événements élémentaires => 50% de la résolution
- 2) Relier l'événement dont on cherche la probabilité en fonction des Événements élémentaires => 30%
- 3) Calculer la proba à l'aide des 5 ou 6 formules du cours => 20%

Exercice :

On a un jeu avec une pièce à 2 faces. On lance cette pièce 3 fois.

Probabilité d'avoir 2 piles ?

1) Événements élémentaires : F = « Tirer Face » et P = « Tirer Pile »

$\Omega = \{PPP, FFF, PFF, FPF, FFP, PPF, PFP, FPP\} \Rightarrow 8$ cas possibles

$$P(PPP) = P(FFF) = \dots = \dots P(FPP) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

=> Événements équiprobables

2) E = « tirer 2 piles »

$$E = \{(PPF) \cup (PFP) \cup (FPP)\}$$

3) $p(E) = p(PPF) + p(PFP) + p(FPP)$ car disjoints

$$\text{Donc } p(E) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

2) Méthode pratique pour définir la fonction probabilité p

a) Cas où Ω est de dimension finie

On a $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

Méthode

A chaque événement élémentaire ω_i , on associe un nombre réel p_i , appelé probabilité de ω_i tel que :

1) $0 \leq p_i \leq 1$

2) $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des ω_i qu'il contient.

Ex :

Avec les 52 cartes : $p_1 = p_2 = \dots = p_{52} = \frac{1}{52}$

E = "Tirer un As" donc $P(E) = P(\text{AsK}) + P(\text{AsC}) + P(\text{AsP}) + P(\text{AsT}) = \frac{4}{52}$

Cas particulier :

Si les événements élémentaires ω_i sont équiprobables. On a :

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \Rightarrow p_i = \frac{1}{n}$$

Dans ce cas, $P(A) = \frac{\text{nb cas favorables}}{\text{nb cas possibles}} = \frac{\text{nb de } \omega_i \text{ contenus dans } A}{\text{nb de } \omega_i \text{ contenus dans } \Omega}$

b) Cas où Ω est infini et dénombrable

Alors $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8\}$

A chaque événement élémentaire ω_i on associe un nombre réel p_i avec :

- 1) $0 \leq p_i \leq 1$
- 2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

NB :

Pas d'événements équiprobables

Ex :

On lance une pièce et on compte le nombre de fois où on a lancé cette pièce avant d'avoir pile.

Événement élémentaire : $\omega_i = \text{« nombre de lancers »}$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, \infty\}$

$$p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{4}, \dots, p_n = \frac{1}{2^n}$$

On a $0 \leq p_i \leq 1$

On vérifie que $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{1}{2} * \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

c) Cas les plus compliqués

→ Méthode en 3 étapes (TD)

III/ Probabilité conditionnelle et indépendance

a) Probabilité conditionnelle

On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant l'événement B, la quantité :

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Le rapport $\frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ donne la probabilité relative de l'événement A dans l'espace réduit B.

Ex :

Jeu de 52 cartes

A = « Tirer un Roi »

B = « Tirer une carte > 10 » (V, D, R, As)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ or } A \subset B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$$

$$\text{Donc } P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{52}}{\frac{16}{52}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{16} = \frac{\text{(nb cas favorables)}}{\text{nb cas possibles dans l'espace réduit de B}}$$

b) Événement indépendants

Définition

Un événement B est dit indépendant d'un événement A si la possibilité que B se produise ne dépend pas du fait que A se produise ou non.

Si A et B indépendants alors :

$$p(B|A) = p(B)$$

Dans ce cas, $p(A \cap B) = p(A) * p(B)$

c) Théorème de la multiplication

$$\text{Or } P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1)$$

$$\text{Avec 3 événements : } P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

Ex :

Urnes avec 4 billes rouges et 3 jaunes, tirage sans remise. Probabilité d'avoir 3 rouges ?

Événement élémentaire : R_i = « Tirer rouge au i^e tirage »

$$E = R_1 \cap R_2 \cap R_3$$

$$P(E) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_3|R_1 \cap R_2)P(R_2|R_1)P(R_1)$$

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{2}{5} * \frac{3}{6} * \frac{4}{7} = \frac{4}{35}$$

Si le tirage avait été avec remise, les événements auraient été indépendants !

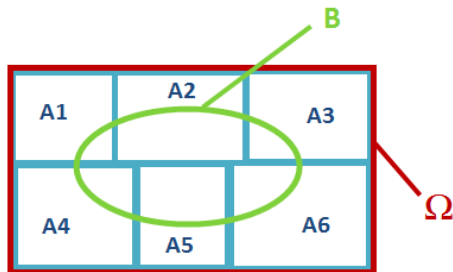
$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)P(R_2)P(R_3) = \left(\frac{4}{7}\right)^3$$

d) Formule des probabilités totales

On considère n événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ qui forment une partition de l'ensemble fondamental Ω

$\Leftrightarrow$ Les A_i sont disjoints deux à deux et $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

Si on effectue une représentation on a :



Soit B un événement quelconque, on a : $B = B \cap \Omega$

$$= B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \dots (B \cap A_n)$$

Donc $P(B) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \dots (B \cap A_n)) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$

$$P(B) = P(B \setminus A_1)P(A_1) + P(B \setminus A_2)P(A_2) + \dots + P(B \setminus A_n)P(A_n)$$

Intérêt : On peut calculer $P(B)$ en connaissant :

- Toutes les causes de A_i
- Toutes les proba de transition $P(B \setminus A_i)$

e) Formule de Bayes

On veut calculer $p(A_i \setminus B)$

On a $p(A_i \setminus B) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(B)}$ (proba condi)

$$= \frac{p(B \cap A_i)}{p(B)} = \frac{p(A_i \setminus B) p(A_i)}{p(B \setminus A_i) + \dots + p(B \setminus A_i) p(A_i) + \dots + p(B \setminus A_i) p(A_i)} = p(A_i \setminus B)$$

=> Formule de Bayes !

Intérêt : Renverser le conditionnement à partir du résultat on veut obtenir les causes !

Ex :

On considère 3 machines A, B et C qui produisent 50%, 30% et 20% du nombre total de vis. Le pourcentage de vis défectueuses est respectivement de 3, 4 et 5%.

1) Si une vis est tirée au hasard, quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?

M = « Vis défectueuse »

A, B et C = « La vis est fabriquée avec A, B ou C »

$M = (M \cap A) \cup (M \cap B) \cup (M \cap C)$

$P(M) = P(M \setminus A)P(A) + P(M \setminus B)P(B) + P(M \setminus C)P(C) \Rightarrow$ Probabilités totales
 $= 0,03 * 0,5 + 0,04 * 0,3 + 0,05 * 0,2 = 3,7\%$

2) Si une vis est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle soit produite par la machine A ?

$E = A \setminus M$ P(E) ?

$$P(A \setminus M) = \frac{P(M \setminus A)P(A)}{P(M)} = \frac{P(M \setminus A)P(A)}{P(M \setminus A)P(A) + P(M \setminus B)P(B) + P(M \setminus C)P(C)}$$

Formule de Bayes

$$P(A \setminus M) = \frac{0,03 * 0,5}{0,037} = 40, \%$$

IV/ Technique de comptage

Analyse combinatoire

Objectif : Compter rapidement le nombre d'éléments d'un ensemble et le nombre de résultats possibles d'une expérience

1) Principe fondamental de comptage

Soit une expérience où on a p étapes successives et indépendantes.

1^e : n_1 résultats possibles

2^e : n_2 résultats possibles

3^e : n_3 résultats possibles

Alors le nombre de résultats possibles de l'expérience est :

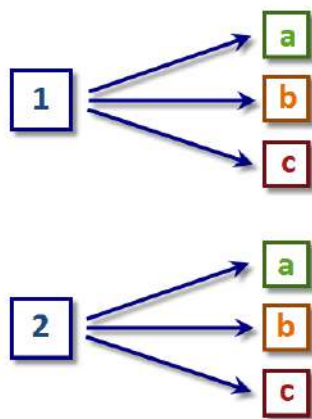
$$N = n_1 * n_2 * n_3 * \dots * n_p$$

Ex :

1^e tirage : 2 cartes : 1 et 2

2^e tirage : 3 cartes : a, b et c

Déroulement possible :



Nombre de déroulements possibles de l'expérience : $N = 6 = 2 * 3 = n_1 * n_2$

2) Permutations

Permutation :

Une permutation de n objets notés $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, est un arrangement des ces n objets dans un ordre donné

$a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ et $a_2 a_1 a_3 \dots a_n$ sont deux permutations

a) Permutation sans répétition

On considère que tous les objets sont discernables (c'est-à-dire que l'on peut les distinguer)

Ex :

Nombre de mots de 3 lettres formés avec les lettres A, B et C ?

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA => 6 mots.

D'une manière plus rapide :



3 étapes, à chaque étape on va remplir une case.

En utilisant le principe fondamental de comptage, le nombre de mots formés est $n_1 * n_2 * n_3 = 3 * 2 * 1 = 6$

En général : n objets discernables

$$N = n!$$

b) Permutation avec répétition

On reprend l'exemple précédent sauf que l'on prend comme lettres A, A et B

Nombre de permutations :

AAB, ABA, BAA => 3 permutations.

Si on peut rendre ces 3 lettres discernables : a_1, a_2, b => 6 permutations.

On a $3 = \frac{6}{2}$, où 2 est le nombre de permutations sur les objets identiques,

6 est le nombre de permutations sur les objets discernables

Si on considère n objets où α, β, γ sont indiscernables.

Alors le nombre de permutations : $N = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!}$

Ex :

E L E C T R I C I T E
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Toutes les lettres étaient discernables : $\frac{11!}{3!2!2!2!}$ nombre de permutations avec répétitions

3) Arrangements

Définition :

Soient n objets. Un arrangement de p objets est obtenu en tirant p objets parmi les n , en les rangeant.

Ex :

$n=4$, 4 lettres a, b, c et d

Nombre d'arrangements de 2 lettres ?

ab, ac, ad, bc, bd, cd, ba, ca, da, cb, db, dc => 12 mots ou objets.

D'une manière plus rapide :



Nombre de places disponibles pour la 1^e case : 4

Nombre de places disponibles pour la 2^e case : 3

=> $4 \times 3 = 12$

En général : n objets, on en prend p

Alors le nombre d'arrangements sera :

$$N = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) = A_n^p$$

4) Combinaisons

Définition :

Soient n objets. Une combinaison de p objets est obtenue en tirant p objets parmi n .

Ex :

4 lettres a, b, c et d

→ ab, ac, ad, bc, bd, cd => 6 combinaisons

Or précédemment, 12 arrangements.

On remarque que $6 = \frac{12}{2} \rightarrow 2$ est le nombre de permutations pour 2 objets

Donc le nombre de combinaisons $\frac{\text{nombre d'arrangements}}{\text{nombre de permutation}} = \frac{A_n^p}{p!}$

$$\text{Ou encore : } C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$
$$C_n^p = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$

Si on reprend l'exemple des 4 lettres :

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! (4-2)!} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

5) Formules

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

Si on veut calculer $C_{20}^{17} = C_{20}^3$

Formule du Binôme de Newton :

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p}$$

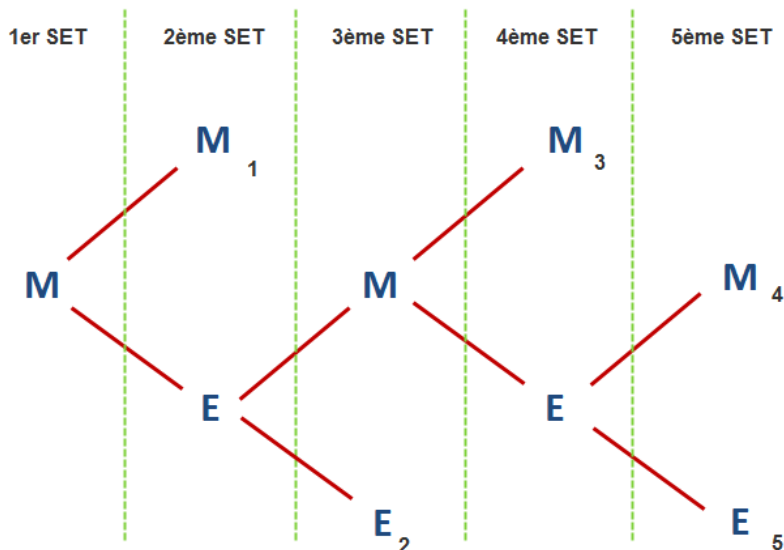
6) Utilisation d'un arbre

Objectif : Un arbre permet d'énumérer tous les résultats possibles d'une expérience se déroulant en plusieurs étapes.

Ex :

Deux joueurs de tennis M et E. Le 1^{er} joueur qui gagne deux sets de suite ou un total de 3 sets gagne la partie !

De combien de façons peut se dérouler la partie ?



On va utiliser un arbre :

On a donc 5 déroulements possibles. Or si E gagne au départ, on a alors $2 \times 5 = 10$ déroulements possibles.

Chapitre 2 : Variables aléatoires

I/ Variables aléatoires à une dimension

1) Définition et exemples

Soit une expérience aléatoire et Ω l'ensemble fondamental.

Une application $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète,
 $\omega \rightarrow X(\omega)$

si l'ensemble des valeurs prises par X est fini ou dénombrable

Une application $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire continue,
 $\omega \rightarrow X(\omega)$

si l'ensemble des valeurs prises par X est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Ex :

On lance 2 dès. Soit X la v.a qui correspond à la somme des points obtenus en jetant ces 2 dès. On a une application de X dans Ω dans $\{2, 3, 4, 5, \dots, 12\}$ avec $\Omega = \{36 \text{ couples } (i, j) \text{ avec } 1 \leq i \leq 6 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$ ici, v.a discrète.

NB :

A partir d'une expérience aléatoire on peut définir une infinité de v.a.

Dans l'ex précédent, $X = \{\text{somme du carré ou somme du cube, des points des 2 dès}\}$

A partir d'une v.a discrète, on va chercher à calculer $P(X=x)$ ou $P(X=x_i)$, avec X le nom de la v.a.

Avec les dés, on veut trouver $P(X=2) = 1/36$.

- Taille d'un individu :

Ω = l'ensemble des habitants de la planète.

On prend une personne au hasard.

L'application $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$\omega =$ « choix de la personne » $\rightarrow X =$ taille de cette personne

est-elle une valeur discrète ou continue ?

➔ Tout dépend de la précision de cette mesure :

- Si on prend le cm : $X(\omega)$ varie de 40cm à 240cm

➔ Valeurs discrètes

- Si on prend le micromètre : $X(\omega)$ varie de $0,4 * 10^6$ à $2,4 * 10^6$

➔ $2 * 10^6$ valeurs : à priori discret...

MAIS impossible de traiter cette v.a. avec les outils classiques des probabilités car il faudrait calculer $P(X = x)$ pour $2 * 10^6$ valeurs.

Donc il est plus simple de considérer cette v.a. comme continue avec $X(\omega)$ compris entre 0,4 et 2,4m.

On va effectuer des calculs sur des intervalles.

NB :

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, pas de probabilité en une valeur donnée.

Ex :

$P(X=x) = P(X=1,72000) = 0$ car aucune personne n'a exactement cette taille.

Par contre, $P(1,70 \leq X \leq 1,72) \neq 0$

Avec les variables continues, on va travailler avec $P(a < X < b)$

- **Durée de vie d'un composant**

Soit Ω l'ensemble constitué d'un grand nombre de composants identiques.

L'application $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$\omega =$ « choix d'un composant » $\rightarrow X(\omega) =$ durée de vie du composant

est une v.a. continue.

2) Loi de probabilité

a) Cas d'une variable aléatoire discrète :

Soit X une v.a. qui ne prend comme valeurs $x, x_2, \dots, x_n$.

Définition :

La loi de probabilité de X est l'ensemble des probabilités $P(X = x_i)$ ou $P(X = x)$ ou $P(\{\omega \mid X(\omega) = x_i\})$ et qui satisfait :

- $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$
- $\sum_i P(X = x_i) = \sum_x P(X = x) = 1 \leftarrow$ Condition de normalisation

Cas discret : 3 étapes pour obtenir la loi de probabilité :

- Valeurs de X
- Calculer $P(X=x)$
- Vérifier $\sum_x P(X = x) = 1$

Ex :

Soit la v.a $X = x$ = somme des points obtenus avec 2 dés

- $X = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$ Loi de probabilité

- Calculer $P(X=x)$: 36 couples formés et équiprobables

X	$\{\omega/X(\omega) = x\}$	$P(X=x)$	
2	(1,1)	1/36	$\leftarrow P(X=2)$
3	(1,2) (2,1)	2/36	$\leftarrow P(X=3) \frac{1+2+3+\dots}{36} = 1$
4	(1,3) (2,2) (3,1)	3/36	
5	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	4/36	
6	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	5/36	
7	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	6/36	
8	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	5/36	
9	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	4/36	
10	(4,6) (5,5) (6,4)	3/36	
11	(5,6) (6,5)	2/36	
12	(6,6)	1/36	

Avec des événements :

A_i = « Le dé A donne i »

B_i = « Le dé B donne i »

$P(X = 2) = P(A_1 \cap B_1) = P(A_1) P(B_1) \leftarrow$ indépendants

$$= \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$P(X = 3) = P((A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1)) = P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_1) \leftarrow$ indé + disjoints

$$= \frac{1}{36} * \frac{1}{36} = \frac{21}{36}$$

NB :

$$P(X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(3 \leq X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{5}{36}$$

$$P(3 < X < 4) = 0$$

b) Cas des v.a. continues :

On parle de densité de probabilité

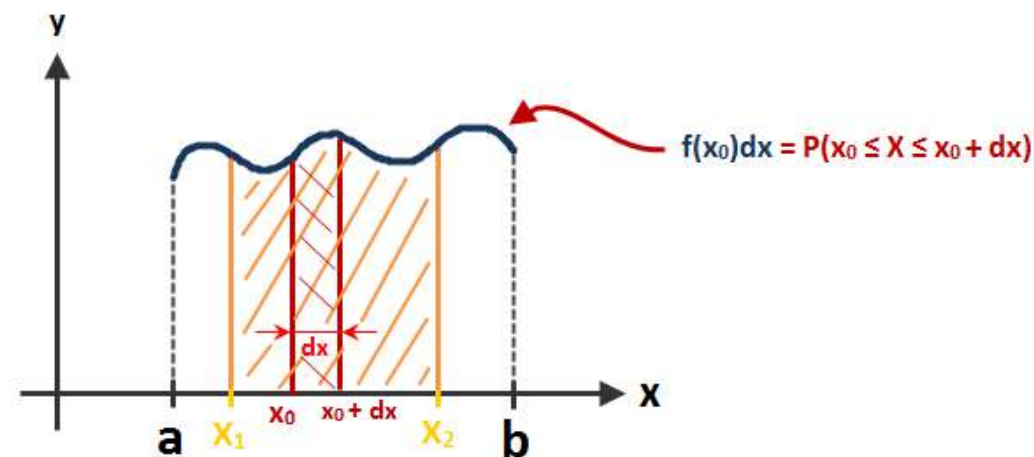
Définition :

Soit X une v.a. continue de Ω dans $[a, b]$

Soit $x_0 \in [a, b]$ ($P(X = x_0) = 0$), la probabilité de X soit compris entre x_0 et $x_0 + dx$ s'écrit :

$$P(x_0 \leq X \leq x_0 + dx) = f(x_0)dx$$

La fonction $f(x_0)$ est la densité de probabilité de X .



donc par extension, que vaut $P(x_1 \leq X \leq x_2 = \text{aire blanche} = \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx$

Propriétés

1/ On a toujours $f(x) \geq 0$ car $f(x).dx$ a la dimension d'une probabilité

2/ Si v.a. continue, $P(X = x_0) = 0$ donc

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2)$$

• Condition de normalisation

$$P(a \leq X \leq b) = 1 = \int_a^b f(x).dx$$

On retrouve les 3 étapes :

- Intervalle de X

- Trouver $f(x)$

- Vérifier que $\int_a^b f(x).dx = 1$

Si l'intervalle est $\mathbb{R}$ tout entier, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$ = Condition de Normalisation

c) Fonction de répartition

Définition

C'est la fonction $F \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow P(X \leq x)$$

ou encore $F(x) = P(X \leq x)$; x est comme une valeur numérique, et X est le nom de la v.a. (ex : somme des résultats de 2 dés)

• Cas des v.a. discrètes

Peu utilisé.

Ex avec les 2 dés :

$$F(4) = P(X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

• Cas des v.a. continues

Très utilisé.

$$F(x_0) = P(X \leq x_0) = P(X < x_0) = \int_{a \text{ ou } -\infty}^{x_0} f(x).dx$$

$$\text{ou encore } P(X \leq x) = F(x) = \int_{a \text{ ou } -\infty}^x f(t).dt$$

NB :

$F'(x) = f(x)$: avec $F'(x)$ = fonction de répartition et $f(x)$ = densité de probabilité.

$$P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx = \int_{x_1}^a f(x).dx + \int_a^{x_2} f(x).dx = \int_a^{x_2} f(x).dx - \int_a^{x_1} f(x).dx = F(x_2) - F(x_1)$$

F est une fonction croissante car $P(x_1 \leq X \leq x_2) \geq 0$

$$\Rightarrow F(x_2) - F(x_1) \geq 0 \Rightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$$

Conclusion :

La loi de probabilité d'une v.a. est donnée :

- Cas discret : par les données de $P(X=x)$
- Cas continu : par la donnée de la densité de probabilité $f(x)$ ou de la fonction de répartition $F(x)$

3) Loïs de probabilités les plus connues

a) Variables aléatoires discrètes

- **Loi uniforme :**

Si la v.a. X prend des valeurs numériques $x_1, x_2, \dots, x_n$, la loi de probabilité de la variable aléatoire X est uniforme si $P(X = x_i)$ est indépendante de $i \Leftrightarrow P(X = x_i) = \text{cte.}$

La C.N. dit que $\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$ donc $P(X = x_i)(\sum_{i=1}^n 1) = 1 \Rightarrow nP(X = x_i) = 1 \Rightarrow P(X = x_i) = \frac{1}{n}$

NB :

Si on a une infinité de valeurs, alors la v.a. ne peut être uniforme.

Ex :

Soit un dé, et X v.a. correspondant au double du nombre tiré.

Loi de probabilité de X :

1) $X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

2)

X	2	4	6	8	10	12
$P(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

3) C.N. : $\sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Loi uniforme $\Rightarrow P(X = x_i) = \frac{1}{6} \Rightarrow 6$ valeurs.

- **Loi Binomiale :**

On considère une ligne de transmission qui a transmis N bits (0 ou 1) ; chaque bit est mal transmis avec la probabilité p et bien transmis avec la probabilité $q = 1-p$.

On suppose l'indépendance des erreurs de transmission.

Soit X la v.a. qui correspond au nombre de bits mal transmis.

Loi de probabilité de X :

1) $X = \{0, 1, 2, \dots, N\}$

2) Loi de proba de X :

Calculer $P(X = x)$:

a- Événements élémentaires : M_i = le i^{e} bit est mal transmis

b- $\{X = 0\} = \{\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \dots \cap \overline{M_n}\}$

c- $P(X = 0) = P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \dots \cap \overline{M_n})$
 $= P(\overline{M_1})P(\overline{M_2}) \dots P(\overline{M_n})$ $\rightarrow$ indépendances
 $= qqq \dots q = q^N = (1-p)^N$

Pour $\{X = 1\} = \{(M_1 \cap \overline{M_2} \cap \dots \cap \overline{M_n}) \cup (\overline{M_1} \cap M_2 \cap \dots \cap \overline{M_n}) \cup \dots (\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \dots \cap M_n)\}$
 $\Rightarrow P(X = 1) = P((M_1 \cap \overline{M_2} \cap \dots \cap \overline{M_n}) \cup (\overline{M_1} \cap M_2 \cap \dots \cap \overline{M_n}) \cup \dots (\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \dots \cap M_n))$
 $= P(M_1 \cap \overline{M_2} \cap \dots \cap \overline{M_n}) + P(\overline{M_1} \cap M_2 \cap \dots \cap \overline{M_n}) + \dots + P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \dots \cap M_n)$
[disjoints]
 $= p(1-p)^{N-1} + p(1-p)^{N-1} \dots$
 $= Np(1-p)^{N-1} = C_N^1 p(1-p)^{N-1}$

Pour $\{X = 2\} = \{(M_1 \cap M_2 \cap \overline{M_3} \dots) \cup (M_1 \cap \overline{M_2} \cap M_3 \cap \overline{M_4} \dots) \dots\}$
 $\Rightarrow P(X = 2) = C_N^2 p^2 * (1-p)^{N-2}$
 $\Rightarrow P(X = 3) = C_N^3 p^3 * (1-p)^{N-3}$
 $\Rightarrow P(X = N) = p^N = C_N^N p^N * (1-p)^{N-N}$

Si on généralise : $P(X = x) = C_N^x p^x (1-p)^{N-x}$
Loi binomiale de paramètres (N, p)

3) C.N.

$\sum_x P(X = x) = \sum_x C_N^x p^x (1-p)^{N-x} = \sum_x C_N^x p^x q^{N-x} = (p+q)^N = 1^N = 1 \Rightarrow \text{C.N. vérifiée}$

Utilisation de la loi Binomiale :

- Une expérience avec N réalisations successives
- Une expérience avec deux résultats possibles : succès (p) ou échec (q)
- N réalisations indépendantes

Si X = « nombre de succès pour N réalisations », alors $P(X = x) = C_N^x p^x (1-p)^{N-x}$

• Loi de Poisson :

C'est une extension de la loi Binomiale.

On peut le faire si N grand et p petit :

On a alors $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ avec $\lambda = Np$

Ex :

Soit une ligne de transmission qui a transmis 100 bits (N= 100) avec une probabilité de mauvaise transmission $p = \frac{1}{100}$

Soit X = « nombre de bits mal transmis »

→ Loi Binomiale : $P(X = x) = C_N^x \left(\frac{1}{100}\right)^x \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100-x}$

→ Loi de Poisson : $P(X = x) = \frac{e^{-1}}{x!}$

Calculs numériques :

x	0	1	2
$P_B(X = x)$	0.366	0.370	0.185
$P_P(X = x)$	0.368	0.368	0.184

→ Faibles différences donc les deux lois sont similaires.

b) Variables aléatoires continues

- Loi uniforme :

On a X qui suit une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$.

On va avoir $f(x) = \text{cte.}$

C.N. : $\int_a^b f(x).dx = 1 \Rightarrow \int_a^b dx = 1$, avec $f(x) = \alpha$

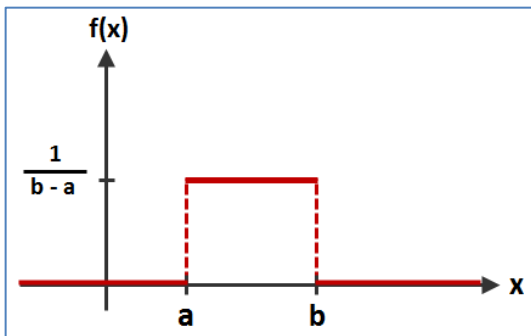
$P(x \leq X \leq x + dx) = f(x).dx$, où $f(x)$ est la densité de probabilité.

$F(x) = P(X \leq x)$

$$\rightarrow d[x]_a^b = 1 \Rightarrow \alpha(b - a) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{b-a} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{b-a}}$$

Loi uniforme sur $[a, b]$

→ D'où la représentation :



NB :

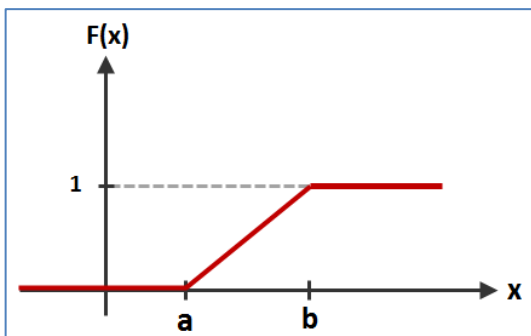
a et b sont de dimensions finies

Pas de loi uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier.

➤ Fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(t).dt = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

→ Représentation :



Loi uniforme :

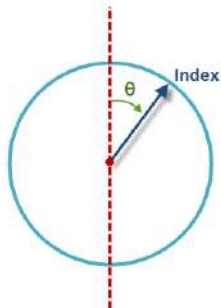
$$x \leq a : F(x) = 0$$

$$a < x < b : F(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

$$x \geq b : F(x) = 1$$

Ex :

❖ Roue de loterie :



Soit θ l'angle entre l'index et la verticale.

Donc θ est une v.a. continue qui correspond à une loi uniforme, or θ varie de 0 à 2π donc la densité de probabilité vaut :

$$f(\theta) = \frac{1}{b - a} = \frac{1}{2\pi - 0} = \frac{1}{2\pi}$$

Si on veut calculer $P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)$, alors $P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) =$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) \cdot d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{2\pi}$$

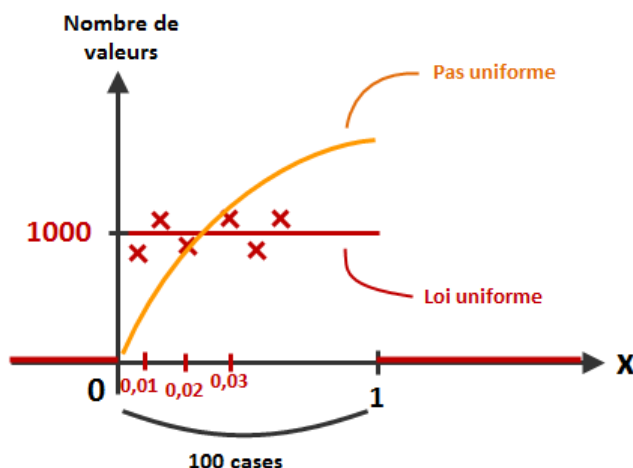
$$= \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}$$

❖ Générateur de nombre aléatoire entre $[0, 1]$:

Si X = « valeur du nombre généré », alors X suit une loi uniforme, donc $f(x) = \frac{1}{b-a} = 1$

NB :

Pour retrouver expérimentalement cette loi uniforme, on va générer 100 000 valeurs.



➔ Ressemble au graphe de la densité de probabilité $f(x)$

On voit que cet histogramme représente une mesure de la densité de probabilité, à condition de le normaliser (= division par 1000).

- **Loi exponentielle :**

→ Densité de probabilité :

On a $f(x) = c e^{-\lambda x} = 0$ si $x \geq 0$

Où « c » est une constante

La condition de normalisation : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} c e^{-\lambda x} dx = 1$$

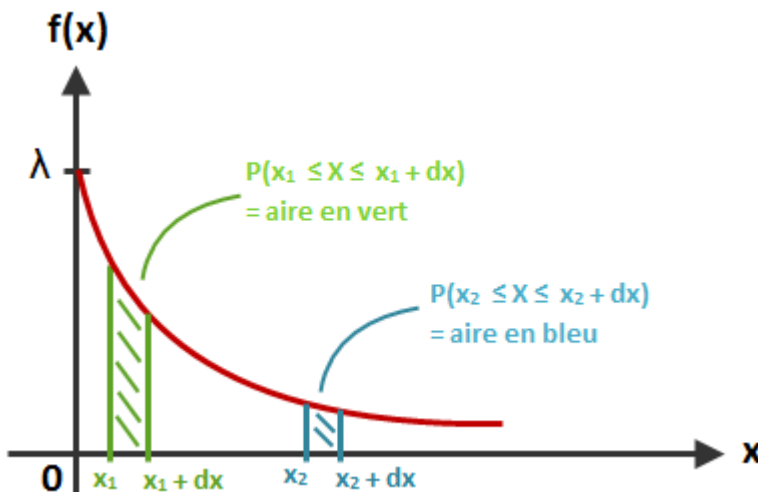
$$\Rightarrow c \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = 1$$

$$\Rightarrow c \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{+\infty} = 1$$

$$\Rightarrow c * \frac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow c = \lambda$$

Loi exponentielle : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$
 $= 0$ sinon

($\lambda \geq 0$)



$f(x_1) \cdot dx$ plus fort que $f(x_2) \cdot dx$ donc les valeurs de x faibles sont plus fréquentes.

→ Fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) \cdot dt \text{ donc } F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \cdot dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = [-e^{-\lambda t} + 1] = 1 - e^{-\lambda x}$$

Fonction de répartition, loi exponentielle :

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \\ = 0 \text{ sinon}$$

- **Loi Normale ou de Gauss**

- Densité de probabilité : on a pour $x \in \mathbb{R}$

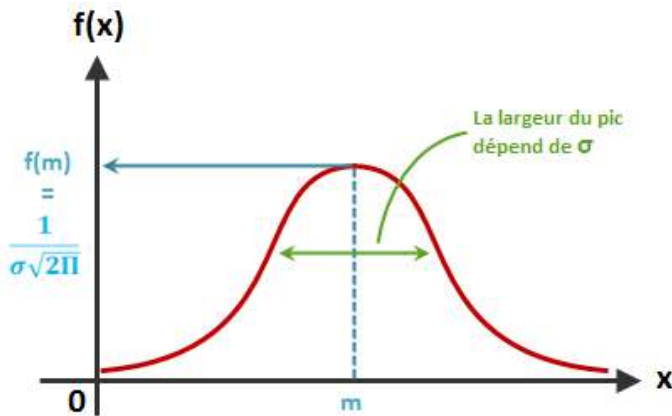
Si x suit une loi Normale ou Gaussienne,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

avec une moyenne ou espérance de la v.a. X et σ écart type de la v.a. X (σ^2 = variance)

Notation : $N(m, \sigma^2)$

Représentation graphique :



Cas particulier :

Il existe une v.a. dite centrée et réduite U , qui suit une loi normale qui est associée à chaque valeur de X . Pour passer de X à U , on effectue un changement de variable en posant : $U = \frac{x-m}{\sigma}$.

Dans ce cas, la densité de probabilité de U est : $f(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U^2}{2}}$.

NB :

Pour passer de X à U , on peut dire que tout se passe comme si $m = 0$ et $\sigma = 1$.

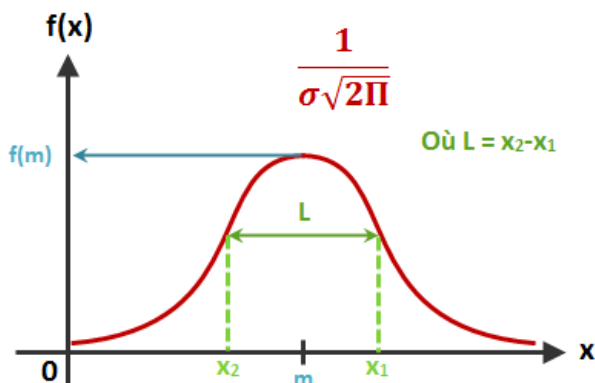
Les valeurs de $F(U)$ sont tabulées. $F(U)$ est la fonction de répartition de U .

Si on connaît U , on peut calculer $F(U)$ [Table I]

Si on connaît $F(U)$, on peut calculer U [Table II]

→ Cf. TD 4

- On va chercher la valeur de la largeur à mi-hauteur :



donc $L = x_2 - x_1$ correspond à $\frac{f(m)}{2} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}$

x_1 et x_2 sont solutions de $f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

$$\Rightarrow (x-m)^2 = 2\sigma^2 \ln 2$$

$$\Rightarrow |x-m| = \sigma\sqrt{2 \ln 2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = m - \sigma\sqrt{2 \ln 2} \\ x_2 = m + \sigma\sqrt{2 \ln 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = x_2 - x_1 = 2\sigma\sqrt{2 \ln 2} \approx 2,4\sigma \Rightarrow L = 2,4\sigma$$

L ne dépend que de σ .

4) Fonction d'une variable aléatoire

Soit X une v.a. de Ω dans $\mathbb{R}$

Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe $h(x)$ alors l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à ω associe $h[X(\omega)] = Y(\omega)$ est une nouvelle v.a. discrète ou continue.

Ex :

$$h(X) = ax + b, \sin X, \log X \dots$$

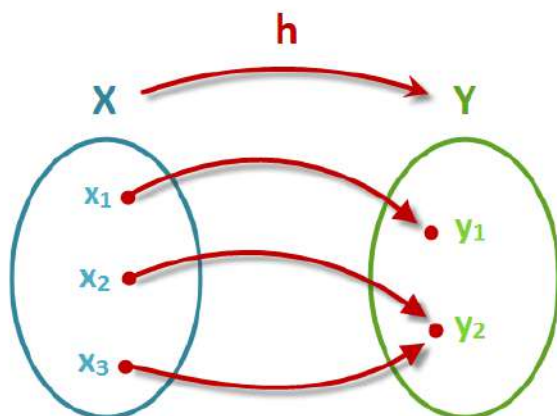
a) Cas des v.a. discrètes

Soit X une v.a. de loi de probabilité connue ($P(X = x)$ connues).

Soit h une fonction qui à X associe $h(X) = Y$.

→ Que vaut la loi de probabilité de $h(X)$ ou de Y ?

Ex :



On veut trouver la loi de probabilité de Y

$$P(Y = y_1) = ?$$

$$P(Y = y_2) = ?$$

On connaît $P(X = x_1)$, $P(X = x_2)$ et $P(X = x_3)$

On a $P(Y = y_1) = P(X = x_1) \rightarrow$ Changement bijectif

$$P(Y = y_2) = P(X = x_2) + P(X = x_3) \rightarrow$$

Changement non bijectif

$$h(x_2) = h(x_3) = y_2$$

D'où la formulation générale :

$$P(Y = y_i) = \sum_{x_j \text{ où } h(x_j) = y_i} P(X = x_j)$$

Ex :

On lance un dé.

Soit X une v.a. qui correspond au résultat du dé.

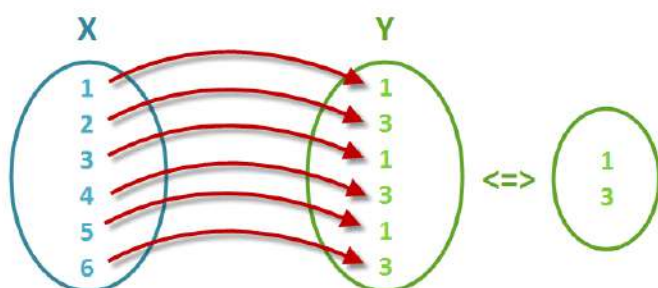
Soit $Y = h(X) = 2X - 1[4] \leftarrow$ « Modulo 4 »

Loi de probabilité de Y ?

Loi de probabilité de X : $P(X = x) = \frac{1}{6}$

1. Valeurs de X et de Y ?

$P(Y = 1) = ?$ $P(Y = 3) = ?$



Pas de changement bijectif.

$$\Rightarrow P(Y = 1) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } P(Y = 3) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = \frac{1}{2}$$

b) Cas des v.a. continues

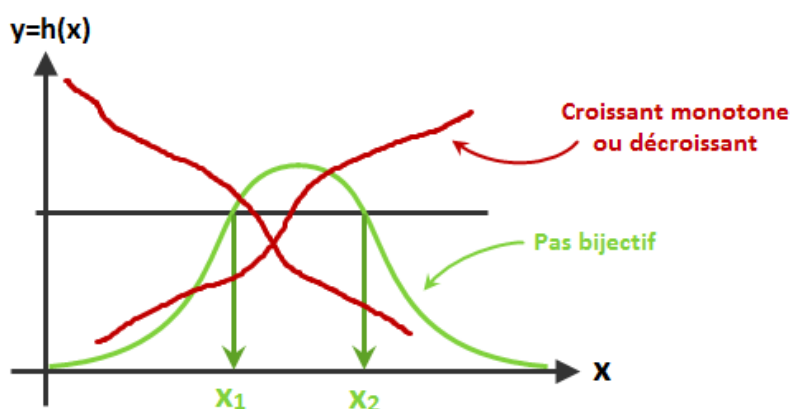
On a X v.a. continue de densité de probabilité $f(X)$ connue.

Soit $h(X) = Y$ une nouvelle v.a. continue.

On veut calculer la densité de probabilité associée à cette nouvelle v.a. Y que l'on notera $g(Y)$.

Deux cas possibles :

1) Cas où h correspond à un changement bijectif :



si h est croissante monotone.

$$\text{Or } P(x \leq X \leq x + dx) = P(h(x) \leq h(X) \leq h(x + dx))$$

$$= P(y \leq Y \leq h(x) + h'(x)dx) = P(y \leq Y \leq y + dy)$$

$$\text{On a } h'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow f(x).dx = g(y).dy$$

On connaît $f(x)$. On cherche $g(y)$.

$$\text{Or } f(x) = g(y) \left(\frac{dy}{dx} \right) (y) = g(y).h'(x) \text{ donc } g(y) = f(x) * \frac{1}{h'(x)}$$

➔ Densité de probabilité de Y !

Si h est décroissante, un signe $-$ apparaît dans l'équation et on a $f(x).dx = -g(y).dy$

Cas général :

$$\text{Pour } h \text{ bijective : } \boxed{f(x)|dx| = g(y)|dy|}$$

Si h non bijective :

- fonctions de répartition
- probabilités avec plusieurs antécédents

➔ Cf TD

Ex/Exo :

$$\text{Cas bijectif : V.a. } X \text{ où } f(X) = \frac{x^2}{81} \text{ si } -3 \leq X \leq 6 \\ = 0 \text{ sinon}$$

$$\text{On pose } Y = \frac{1}{3}(12 - X) = h(X)$$

Changement bijectif ?

Droite de pente $-\frac{1}{3} \Rightarrow$ Décroissante monotone

$\Rightarrow$ Bijectif.

$$\text{Donc } f(x)|dx| = g(y)|dy| \text{ or } f(x) = \frac{x^2}{81}$$

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = |h'(x)| = \frac{1}{3} \Rightarrow \left| \frac{dx}{dy} \right| = +3$$

$$\text{Donc } g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{x^2}{81} * 3 = \frac{x^2}{27}$$

$$\text{On a } y = \frac{1}{3}(12 - x) \Rightarrow 3y = 12 - x \Rightarrow x = 12 - 3y.$$

$$\text{Donc } g(y) = \left(\frac{(12-3y)^2}{27} \right) = \frac{(4-y)^2}{3}$$

Donc

$$g(y) = \frac{(4-y)^2}{3} \text{ si } 2 \leq y \leq 5 \\ = 0 \text{ sinon}$$

5) Espérance mathématique

a) Définition

Il s'agit de la moyenne d'une v.a. Si on fait la moyenne des notes, on prend la moyenne arithmétique : 5 10 12 10 3.

Moyenne : $\frac{5+10+12+10+3}{5} = \frac{40}{5} = 8$

Ou encore $5 * \frac{1}{5} + 10 * \frac{1}{5} + 12 * \frac{1}{5} + 10 * \frac{1}{5} + 3 * \frac{1}{5}$ où $1/5$ est la pondération.

On peut considérer une pondération différente pour chaque valeur.

Cette pondération correspond à une fréquence d'apparition ou encore à une notion de probabilité.

- **Cas d'une v.a. discrète**

On va considérer une v.a. discrète avec $P(X = x)$ connues.

$$E(X) = \sum_x xP(X = x)$$

- **Cas d'une v.a. continue**

Soit X est une v.a. continue sur un intervalle $[a, b]$.

On définit sa densité de probabilité $f(X)$:

Par analogie par rapport au cas précédent :

$$E(X) = \int_a^b xf(x).dx$$

NB :

1- Signification de $E(X)$:

Appareillage de mesure :

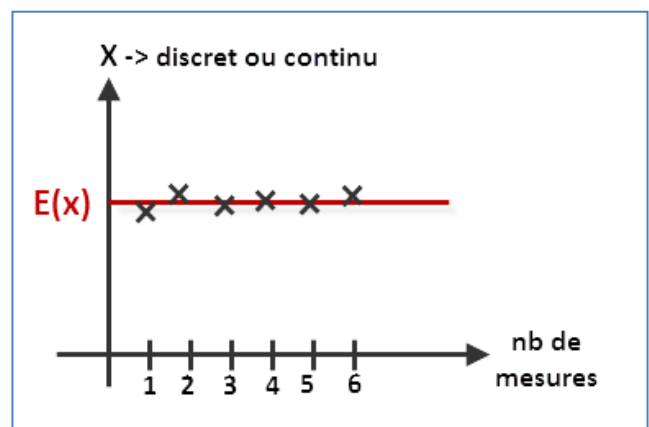
2- Générations de nombre aléatoire :

Soit X une valeur aléatoire entre $[0, 1]$.

Valeur de la moyenne : $E(X) = \frac{1}{2}$

Par le calcul : $E(X) = \int_0^1 xf(x).dx$ loi uniforme

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{1-0} = 1 = \int_0^1 x. dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$



b) Calcul de l'espérance de différentes v.a.

• V.a. discrètes

Ex 1 :

On lance une pièce 6 fois. X = nombre de piles obtenus.

x	0	1	2	3	4	5	6
P(X = x)	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

Donc

$$E(X) = \sum_x xP(X = x) = 0 * \frac{1}{64} + 1 * \frac{6}{64} + 2 * \frac{15}{64} + 3 * \frac{20}{64} + 4 * \frac{15}{64} + 5 * \frac{6}{64} + 6 * \frac{1}{64} = \frac{192}{64} = 3$$

- Evénements successifs.

- Deux cas : P ou F

- Evénements indépendants

=> Loi Binomiale $n = 6$ et $p = \frac{1}{2}$

On remarque que $E(X) = 6 * \frac{1}{2} = n * p$

Ex 2 :

On peut généraliser :

Loi Binomiale, n et p : $E(X) = n * p$

Ex 3 :

Loi de Poisson : $E(X) = \lambda$ de paramètre λ ($= np$)

• V.a. continues

Ex 1 :

Loi uniforme $\rightarrow X$ sur un intervalle $[a, b]$

On a vu que $f(x) = \frac{1}{b-a}$. D'où :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b x f(x) \cdot dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} * \int_a^b x \cdot dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) \\ &= \frac{(b-a)(a+b)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Ex 2 :

Loi exponentielle :

$$f(x) = \lambda e^{(-\lambda x)} \text{ si } x \geq 0.$$

$$= 0 \text{ ailleurs}$$

D'où :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\text{On pose } u = x \quad u' = 1$$

$$v = \frac{-(e^{-\lambda x})}{\lambda} \quad v' = e^{-\lambda x}$$

$$\text{D'où : } E(X) = \lambda \left[\frac{-x e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \cdot dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{-e^{(-\lambda x)}}{\lambda} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Loi exponentielle, paramètre λ : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Ex 3 :

Loi Normale : $N(m, \sigma^2)$, m = moyenne.

$$\text{On a } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

L'objectif est d'arriver à $E(X) = m$?

$$\rightarrow u = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cdot du = \sqrt{\pi}$$

A FAIRE

c) Propriétés de l'espérance mathématique :

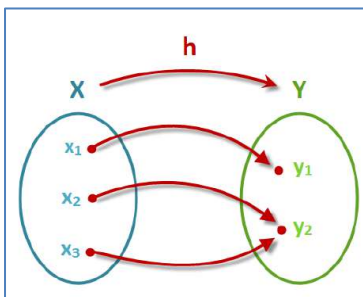
• Cas des v.a. discrètes

Soient X une v.a. et h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $Y = h(X)$ est une nouvelle v.a.

On peut montrer que :

$$E(Y) = E[h(X)] = \sum_x h(x) P(X = x)$$

Ex :



$$E(Y) = E[h(X)] = \sum_y y P(Y = y) = y_1 P(Y = y_1) + y_2 P(Y = y_2)$$

$$= y_1 P(X = x_1) + y_2 [P(X = x_2) + P(X = x_3)]$$

$$= h(x_1) P(X = x_1) + h(x_2) P(X = x_2) + h(x_3) P(X = x_3)$$

$$= \sum_x h(x) P(X = x)$$

Intérêts :

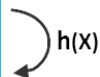
- Calculer $E(Y)$ sans connaître la loi de probabilité de Y .
- Moyenne de $h(X)$.

Ex :

On a un dé. $X = \text{« Nombre de points »}$.

$$Y = h(X) = 2X - 1[4]$$

X	1	2	3	4	5	6
Y	1	3	1	3	1	3



$$P(Y = 1) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) = \frac{1}{2} = P(Y = 3)$$

On veut $E(Y) = ?$

Deux façons :

- On ne connaît pas la loi de probabilité de Y :

$$\begin{aligned} E(Y) = E[h(X)] &= \sum_x h(x)P(X = x) \\ &= 1 * \frac{1}{6} + 3 * \frac{1}{6} + 1 * \frac{1}{6} + 3 * \frac{1}{6} + 1 * \frac{1}{6} + 3 * \frac{1}{6} = \frac{12}{6} = 2 \end{aligned}$$

- Si on fait le calcul direct :

$$E(Y) = \sum_y yP(Y = y) = 1 * \frac{1}{2} + 3 * \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

• Cas de v.a. continues

Par analogie :

$$E[h(X)] = \int_a^b h(x)f(x).dx$$

Ex d'application :

On a $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$ si α et β sont des constantes.

$$E[\alpha X + \beta] = E[h(X)] \text{ où } h(X) = \alpha X + \beta$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b xf(x).dx = \int_a^b (\alpha x + \beta)f(x).dx \\ &= \alpha \int_a^b xf(x).dx + \beta \int_a^b f(x).dx = \alpha E(X) + \beta \end{aligned}$$

6) Variances et moments

a) Définition

Soit une v.a. X avec une espérance $E(X)$ finie, alors :

$$\boxed{Var(X) = E[(X - E(X))^2]}$$

Dans le cas discret :

$$Var(X) = \sum_x (x - E(x))^2 P(X = x)$$

Dans le cas continu :

$$Var(X) = \int_a^b (x - E(x))^2 f(x) dx$$

NB :

$$Var(X) = \sigma_x^2 = \sigma^2$$

σ_x ou σ : écart type ou écart quadratique

Propriété :

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2} \text{ Formule Pratique.}$$

Démonstration :

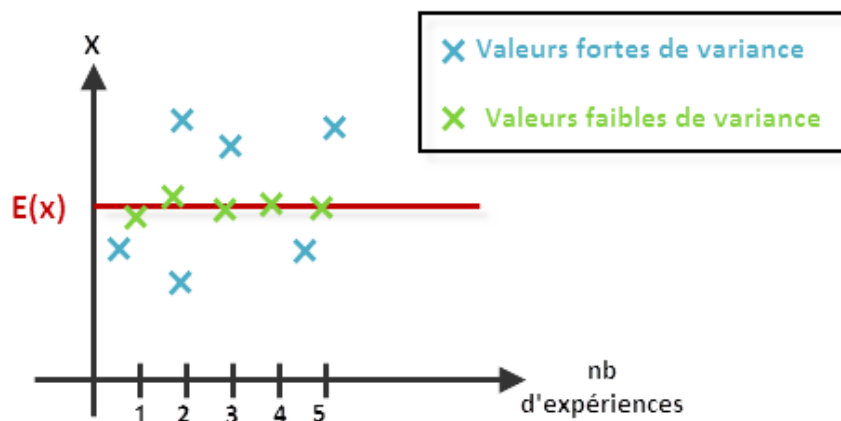
- Cas d'une v.a. continue :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_a^b (x - E(X))^2 f(x) \cdot dx = \int_a^b [x^2 - 2xE(X) + (E(X))^2] f(x) \cdot dx \\ &= \int_a^b x^2 f(x) \cdot dx - 2E(X) \int_a^b x f(x) \cdot dx + (E(X))^2 \int_a^b f(x) \cdot dx \\ &= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

$$Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2 \text{ Formule pratique.}$$

NB :

Signification de cette notion de variance :



b) Exemples

- Cas des v.a. discrètes

Ex 1 :

Soit un dé. $X = \text{« résultat du dé »}$. $Y = 2X - 1[4]$.

On avait précédemment, $E(X) = 3,5$ et $E(Y) = 2$.

On veut calculer $\text{Var}(X)$ et $\text{Var}(Y)$.

$$E(X^2) = \sum_x x^2 P(X = x). \text{ (Formule : } E[h(X)] = \sum_x h(X)P(X = x) \text{)}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = 91/6$$

$$\text{Var}(X) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{2}(1 + 9) = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{Var}(Y) = 5 - 4 = 1$$

Ex 2 :

On lance une pièce 6 fois. Soit $X = \text{« nombre de piles obtenus »}$.

On a :

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

$$\Rightarrow E(X) = 3$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \text{ or :}$$

$$E(X^2) = \frac{6}{64} * 1 + \frac{15}{64} * 4 + \frac{20}{64} * 9 + \frac{15}{64} * 16 + \frac{6}{64} * 25 + \frac{1}{64} * 36 = \frac{672}{64} = \frac{21}{2}$$

donc on a une loi Binomiale :

$$N = 6, \quad p = \frac{1}{2}$$

$$\text{On a vu que } E(X) = Np = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{On peut remarquer ici que } \text{Var}(X) = Np(1 - p) = 6 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Loi Binomiale de paramètres N et p !

$$E(X) = Np$$

$$\text{Var}(X) = Np(1 - p)$$

Loi de Poisson :

$$E(X) = \text{Var}(X) = \lambda = Np$$

- Cas des v.a. continues

Ex 1 :

Loi uniforme $\rightarrow$ traité en TD 5.

Ex 2 :

Loi exponentielle : On a $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$
= 0 ailleurs.

On a montré que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x) \cdot dx$$

$$\text{car } E[h(X)] = \int_a^b h(x) f(x) \cdot dx \text{ donc } E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} \cdot dx$$

Intégration par partie :

$$\text{On pose } u = x^2 \quad u' = 2x$$

$$\text{et } v = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \quad v' = e^{-\lambda x}$$

D'où :

$$E(X^2) = [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} \cdot dx = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} \cdot dx \lambda = \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \cdot dx = \frac{2}{\lambda} E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

c) Propriétés de la variance

Si α et β sont des constantes, on a $\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$.

Démonstration :

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = E[(\alpha X + \beta)^2] - [E(\alpha X + \beta)]^2 \text{ or } E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta \quad [\text{cours 7}]$$

$$\text{et } E[(\alpha X + \beta)^2] = E[\alpha^2 X^2 + 2\alpha\beta X + \beta^2]$$

D'où :

$$\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 E(X^2) + 2\alpha\beta E(X) + \beta^2 - \alpha^2 E(X)^2 - 2\alpha\beta E(X) - \beta^2$$

$$= \alpha^2 E(X^2) - \alpha^2 (E(X))^2 = \alpha^2 [E(X^2) - (E(X))^2] = \alpha^2 \text{Var}(X)$$

d) Moments d'une v.a.

Définition :

Moment d'ordre n d'une v.a. X vaut $E(X^n)$.

Avec $E(X^n) = \sum_x x^n P(X = x)$ si X est discrète.

$$E(X^n) = \int_a^b x^n f(x) \cdot dx$$

Moment d'ordre 1 : $E(X^1) = E(X)$ = espérance de X .

Moment d'ordre 2 : variance de X si $E(X)$ est nulle.

II/ Variables aléatoires à deux dimension

1) Exemples et définitions

a) Exemples

Ex 1 :

On va considérer un jeu avec un dé et une pièce.

Soient :

X = « le résultat du dé »

Y = « le résultat de la pièce »

Pour calculer la probabilité de gagner avec une certaine règle du jeu, on va devoir travailler sur le couple (X, Y) .

Ex 2 :

On considère un arrêt de bus.

On va définir 2 v.a. :

X = « heure d'arrivée du bus »

Y = « heure d'arrivée de la personne »

Pour estimer la probabilité que la personne rate ou prenne le bus, on va travailler sur le couple $(X, Y) \rightarrow$ solution complète en TD.

b) Loi de probabilité jointe (cas discret)

Soit Ω l'ensemble fondamental. Soient X et Y deux v.a. discrètes de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Alors l'application de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une v.a. discrète, on parle de couple, et de loi de probabilité jointe :

$$P(X = x, Y = y) = P\left[\frac{\omega}{X(\omega)} = x \text{ et } Y(\omega) = y\right] \text{ (la virgule équivaut à « et »).}$$

Cas à une dimension, les résultats sont :

x	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x)$	...			

NB :

$$0 \leq P(X = x, Y = y) \leq 1$$

Somme des probabilités de la $i^{\text{ème}}$ ligne : $P(X = x_i)$

Somme des probabilités de la $j^{\text{ème}}$ colonne : $P(Y = y_j)$

$$\sum_x \sum_y P(X = x, Y = y) = 1 \text{ C.N.}$$

Déf :

$P(X = x)$ et $P(Y = y)$ sont les lois de probabilité marginales du couple (X, Y) .

NB :

Connaissance de $P(X = x, Y = y) \Rightarrow P(X = x)$ et $P(Y = y)$ **LA RECIPROQUE EST FAUSSE !**

Cas à deux dimensions :

X / Y	y_1	y_2	...	y_m	Somme
x_1	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(X = x_1, Y = y_2)$	...	$P(X = x_1, Y = y_m)$	$P(X = x_1)$
x_2					$P(X = x_2)$
...					
x_n	$P(X = x_n, Y = y_1)$			$P(X = x_n, Y = y_n)$	$P(X = x_n)$
Somme	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	...	$P(Y = y_m)$	1 C.N.

NB :

- $0 \leq P(X = x, Y = y) \leq 1$
- $\sum_n P(X = x_i, Y = y_i) = P(X = x_i)$ si i est fixé.
- n fixé $\Rightarrow P(Y = y_n)$

Déf :

$P(X = x)$ et $P(Y = y)$ sont les lois de probabilité marginale du couple (X, Y) .

NB :

Connaissance de $P(X = x, Y = y) \Rightarrow P(X = x) \cap P(Y = y)$.

La réciproque est fausse.

Exercice :

On considère un jeu avec un dé et une pièce.

Déroulement du jeu :

On lance le dé

$\Rightarrow$ Si $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Rightarrow$ on perd 1€

$\Rightarrow$ Si $\{As\}$

$\Rightarrow$ Si pièce = P : abandonner gain de 10€

$\Rightarrow$ Si pièce = F : on relance le dé

$\Rightarrow$ Si $\{As\}$: gain de 100€

⇒ Si autre : on perd 10€

Soient les événements :

X = « nombre de lancer de dé »
 $= \{1, 2\}$

Y = « gain ou perte en euros »
 $= \{-10, -1, +10, +100\}$

$X \backslash Y$	10	1	10	100	$P(X = x)$
1	0	5/6	1/12	0	11/12
2	5/72	0	0	1/72	6/72
$P(Y = y)$	5/72	5/6	1/12	1/72	1

c) Cas des v.a continues

On parle de densité de probabilité jointe.

Rappels :

A une dimension, $P(x \leq X \leq x + dx) = f(x) \cdot dx$

A deux dimensions, soit X et Y 2 v.a.c, (X, Y) prennent des valeurs dans un domaine D du plan.

La densité de probabilité jointe du couple (X, Y) est la fonction $f(x, y)$ telle que :

$$P(x \leq X \leq x + dx, y \leq y + dy) = f(x, y) dx dy$$

NB :

Soit A un domaine inclus dans D .

$$P((x, y) \in A) = \iint_{(x, y) \in A} f(x, y) \cdot dx dy$$

Propriétés de $f(x, y)$:

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\iint_D f(x, y) \cdot dx dy = 1 \quad \text{Condition de normalisation.}$$

Densités de probabilités marginales de X et Y :

Rappel :

Cas des v.a.d : $P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$

Cas des v.a.c : on procède par analogie :

$$f_X(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) \cdot dy$$

$$f_Y(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) \cdot dx$$

NB :

La connaissance de $f(x, y)$

⇒ Connaissance de $f_X(x)$ et $f_Y(y)$

La réciproque est fausse !

Soit (X, Y) les coordonnées d'un point sur une cible D. (X, Y) forment un couple de v.a.c. dont la densité de probabilité jointe est uniforme sur D. Donc ici $f(x, y) = \text{constante}$ pour $(x, y) \in D$.

D'après la condition de normalisation : $\iint_D f(x, y) \cdot dx dy = 1$.

$$\text{Si } f(x, y) = c \text{ donc } \iint_D c \, dx dy = 1 \Rightarrow c \iint_D dx dy = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\iint_D dx dy} = \frac{1}{\text{Aire de } D}$$

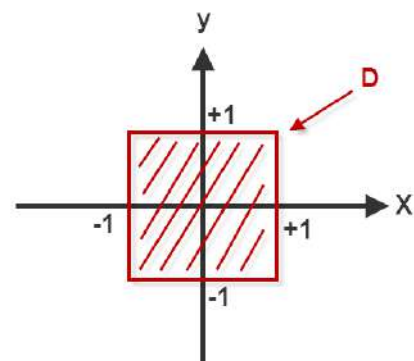
• **1^e cas :**

Ici aire de D = 4 donc $f(x, y) = \frac{1}{4}$ si $(x, y) \in D$
= 0 ailleurs.

→ Uniforme.

$$f_X(x) = \int_{-1}^1 f(x, y) \cdot dy = \int_{-1}^1 \frac{dy}{4} = \left[\frac{y}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} \text{ alors } X \text{ et } Y \text{ suivent des lois uniformes sur } [-1 ; 1]$$

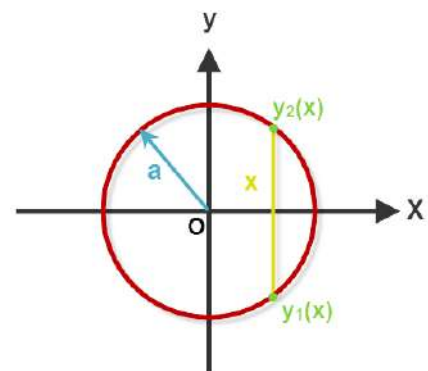


• **2^e cas :**

D est un disque

$$\text{Donc ici } f(x, y) = \frac{1}{\text{Aire du disque}} = \frac{1}{\pi a^2} \text{ si } (x, y) \in D$$
$$= 0 \text{ ailleurs.}$$

→ Loi uniforme.



Densités marginales :

$$f_X(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \cdot dy$$

Pour un cercle : $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$
 $y_1 = -\sqrt{a^2 - x^2}$

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\pi a^2} \cdot dy = \frac{1}{\pi a^2} [y]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{2\sqrt{a^2-x^2}}{\pi a^2}$$

$$\text{Donc } f_X(x) = \frac{2\sqrt{a^2-x^2}}{\pi a^2} \text{ si } x \in [-a; a] \\ = 0 \text{ ailleurs}$$

$$\text{De même, } f_Y(y) = \frac{2\sqrt{a^2-y^2}}{\pi a^2} \text{ si } y \in [-a; a] \\ = 0 \text{ ailleurs}$$

X et Y ne suivent pas des lois uniformes sur $[-a; a]$.

Conclusion :

Si $f(x, y)$ est uniforme sur D ~~X~~ $f_X(x)$ et $f_Y(y)$ uniformes.

d) Fonction de répartition

Définition :

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

2) V.a. indépendantes

a) Définition

Les v.a. X et Y sont indépendantes si :

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \text{ ou}$$

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

➔ Analogie avec : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ si A et B indépendants.

Dans ce cas, la connaissance de $P(X = x, Y = y) \Leftrightarrow$ connaissance de $P(X = x)$ et de $P(Y = y)$
connaissance de $f(x, y) \Leftrightarrow$ connaissance de $f_X(x)$ et $f_Y(y)$.

b) Exemples

- Cas des v.a. discrètes

X / Y	1	3	4	$P(X = x)$
1	0,06	0,15	0,09	0,3
2	0,14	0,35	0,21	0,7
$P(Y = y)$	0,2	0,5	0,3	

X et Y sont-ils indépendants ?

On doit avoir ! $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ pour toutes les valeurs de (X, Y) !

On remarque que par exemple : $P(X = 2, Y = 3) = 0,35$ or $P(X = 2) = 0,7$ et $P(Y = 3) = 0,5$
 $\rightarrow P(X = 2, Y = 3) \neq P(X = 2)P(Y = 3)$.

A vérifier pour toutes les valeurs de X ET de Y.

Si vrai $\rightarrow$ X et Y indépendants.

Autre exemple, cas discret :

CF : Exercice avec le dé et la pièce. Ici X et Y ne sont pas indépendants car :

$$P(X = 1, Y = -10\text{€}) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = -10) = \frac{11}{12} * \frac{5}{72}$$

- Cas des v.a. continues

On reprend l'exemple des v.a. discrètes.

1) Si D est le disque :

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi a^2}$$
$$f_X(x) = \frac{2\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi a^2} \text{ et } f_Y(y) = \frac{2\sqrt{a^2 - y^2}}{\pi a^2}$$

On remarque que $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Situation normale car on a la relation : $x^2 + y^2 \leq a^2$. Donc X et Y sont deux variables liées.

2) Si D est un carré :

$$f(x, y) = \frac{1}{4} = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$$

Donc X et Y sont indépendantes, aucune relation entre X et Y.

c) Conséquences

Si X et Y indépendantes, $P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2)P(y_1 \leq Y \leq y_2)$

De même avec la fonction de répartition :

$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$ X et Y sont indépendants.

3) Fonction de v.a.

a) Définition

Rappel :

Soit X une v.a. et $h(x)$ une fonction, alors $h(x)$ est aussi une v.a.

Cas à 2 dimensions :

Soit (X, Y) un couple de v.a. , soit $h(x, y)$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ alors $h(x, y)$ constitue une nouvelle v.a.

Exemples :

$$h(X, Y) = X + Y, XY, \text{Max}(X, Y)$$

b) Loi de probabilité de $h(X, Y)$

- Cas des v.a. discrètes :

- Assez simple dans ce cas.
- On va partir de la probabilité jointe : $P(X = x, Y = y)$

Méthode à partir d'un exemple :

Soient X et Y deux v.a. discrètes et indépendantes.

On connaît $P(X = x, Y = y)$

On va définir $h(X, Y) = X + Y = S$

Trouver la loi de probabilité de la nouvelle v.a. S ?

$$\begin{aligned} P(X + Y = s) &= P(S = s) \\ &= P[(X = 0 \cap Y = s) \cup (X = 1 \cap Y = s - 1) \cup \dots \cup (X = s \text{ et } Y = 0)] \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(S = s) &= P(X = 0, Y = s) + P(X = 1, Y = s - 1) + \dots + P(X = s, Y = 0) \\ &= P(X = 0)P(Y = s) + P(X = 1)P(Y = s - 1) + \dots + P(X = s)P(Y = 0) \end{aligned}$$

Ex :

Soit deux v.a. X et Y . X suit une loi de Poisson, de paramètre λ :

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

De même pour Y :

$$P(Y = y) = \frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!}$$

Si on cherche la loi de probabilité de $S = X + Y$, alors :

$$P(X + Y = s) = \sum_{x=0}^s \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} * \frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{x=0}^s \frac{1}{x!(s-x)!} \lambda^x \mu^{s-x} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{x=0}^s \frac{C_s^x}{s!} \lambda^x \mu^{s-x}$$

$$\text{Or } C_s^x = \frac{s!}{x!(s-x)!}$$

$$P(X + Y = s) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{s!} \sum_{x=0}^s C_s^x \lambda^x \mu^{s-x} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{s!} (\lambda + \mu)^s$$

Donc la loi de probabilité sur S correspond à une loi de Poisson de paramètre $(\lambda + \mu)$.

• Cas des v.a. continues

L'idée est de calculer la densité de probabilité de $h(X, Y)$ en connaissant la loi de probabilité jointe du couple $(X, Y)(f(x, y))$.

Méthode basée sur le calcul de la fonction de répartition :

Si $S = P(X, Y)$ on peut trouver :

$F(s) = P[h(X, Y) \leq s] = P[(x, y) / h(x, y) \leq s]$ et $h(x, y) \leq s$ correspond à une région du plan $A(s)$, limitée par la courbe $h(x, y) = s$ (frontière).

D'où $F(s) = P[(x, y) / (x, y) \in A(s)] = \iint_{(x,y) \in A(s)} f(x, y). dx dy$

Et ensuite, pour obtenir $f(s) = F'(s)$.

c) Espérance de $h(X, Y)$

Rappel :

V.a. a une dimension :

$E[h(X)] = \sum_x h(x)P(X = x)$ si X v.a. discrète.

Dans le cas des v.a. doubles :

Si X et Y discrètes : $E[h(X, Y)] = \sum_x \sum_y h(x, y)P(X = x, Y = y)$

Si X et Y continues : $E[h(X, Y)] = \iint_D h(x, y)f(x, y). dx dy$

Exemples fondamentaux :

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

Pour a et b constantes réelles l'espérance est un opérateur dit linéaire.

Démonstration :

$$\begin{aligned} E(aX + bY) &= E[h(X, Y)] = \iint (ax + by) f(x, y) dx dy \\ &= a \int \int_x x f(x, y) dx dy + b \int \int_y y f(x, y) dx dy \\ &= a \int_x x \left[\int_y f(x, y) dy \right] dx + b \int_y y \left[\int_x f(x, y) dx \right] dy \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}} \\ &= \text{densité marginale de Y} \end{aligned}$$

$$E(aX + bY) = a \underbrace{\int_x x f_X(x) \cdot dx}_{E(X)} + b \underbrace{\int_y y f_Y(y) \cdot dy}_{E(Y)} = aE(X) + bE(Y)$$

Si X et Y sont indépendants $\rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$. **La réciproque est fausse.**

Démonstration du cas discret

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y xy P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x \sum_y xy P(X = x)P(Y = y) = \left(\sum_x xP(X = x) \right) \left(\sum_y yP(Y = y) \right) = E(X)E(Y) \end{aligned}$$

d) Variance de $h(X, Y)$

Rappel :

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} Var[h(X, Y)] &= E[(h(X, Y) - E[h(X, Y)])^2] = E[h^2(X, Y)] - (E[h(X, Y)])^2 \\ &= \sum_x \sum_y h^2(x, y)P(X = x, Y = y) - \left[\sum_x \sum_y h(x, y)P(X = x, Y = y) \right]^2 \\ &= \iint_D h^2(x, y)f(x, y)dxdy - \left(\iint_D h(x, y)f(x, y)dxdy \right)^2 \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} Var(aX + bY) &= E[(aX + bY)^2] - (E(aX + bY))^2 \\ &= E(a^2X^2 + 2abXY + b^2Y^2 - [aE(X) + bE(Y)]^2) \\ &= \cancel{a^2E(X^2)} + 2abE(XY) + \cancel{b^2E(Y^2)} - \cancel{a^2(E(X))^2} - 2abE(X)E(Y) - \cancel{b^2(E(Y))^2} \\ &= a^2[E(X^2) - (E(X))^2] + b^2[E(Y^2) - (E(Y))^2] + 2ab[E(XY) - E(X)E(Y)] \\ &= a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2ab[E(XY) - E(X)E(Y)] \end{aligned}$$

Pour X et Y quelconques.

NB :

Si X et Y sont indépendants, donc :

$$Var(aX + bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y)$$

4) Covariance et coefficient de corrélation

a) Covariance

Soit X et Y deux v.a. alors la covariance de X et Y est :

$$\boxed{cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

Propriété

Si X et Y indépendantes, alors $cov(X, Y) = 0$

Application :

$$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab cov(X, Y)$$

b) Coefficient de corrélation

Définition

Soit X et Y deux v.a. Le coefficient de corrélation est défini par :

$$\boxed{\rho = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

On a $-1 \leq \rho \leq 1$

Démonstration :

On pose $Z = aX + bY$.

On a $Var(Z) = Var(aX + bY)$

$\rightarrow \sigma_Z^2 = a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2 + 2ab cov(X, Y) \geq 0$ Pour toutes les valeurs de a et b.

Si on considère cette expression comme une équation du 2^e degré en a, on doit avoir $\Delta \leq 0$.

$$\Delta = 4b^2 cov^2(X, Y) - 4a^2 \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \leq 0$$

$$\rightarrow cov^2(X, Y) \leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2$$

$$\frac{cov^2(X, Y)}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} \leq 1 \rightarrow \rho \leq 1 \rightarrow -1 \leq \rho \leq 1$$

Si X et Y sont indépendants, alors :

$$cov(X, Y) = 0 \rightarrow \rho = 0.$$

Si X = Y, on a :

$$cov(X, Y) = cov(X, X) = E(X^2) - (E(X))^2 = Var(X) = \sigma_X^2$$

$$\text{D'où } \rho = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1.$$

Ce coefficient ρ est une estimation du degré d'indépendance entre deux v.a.