

I. Ensemble fondamental-Événement

- Expérience aléatoire : expérience, répétée dans mêmes conditions, ne donne pas le même résultat
- Ensemble fondamental Ω : ensemble des résultats possibles de l'expérience
- Événement : sous ensemble de Ω noté en général avec une lettre majuscule, A

Remarques :

- 1) Complémentaire de A noté A^c ou $\bar{A}$
- 2) Union de deux événements notée $A \cup B$
- 3) Intersection de deux événements notée $A \cap B$
- 4) Événement donné moins un autre événement noté $A - B$
- 5) Événement impossible = ensemble vide noté $\emptyset$
- 6) Événement certain = ensemble fondamental
- 7) Lois de la théorie des ensembles : associativité, commutativité, distributivité, identité et complémentarité

II. Définition d'une fonction probabilité

Définition :

Soit une expérience, son ensemble fondamental associé Ω et a l'ensemble des événements; p est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{a})$ si l'application

$$p : \mathcal{a} \rightarrow [0,1] \text{ vérifie } 1) p(\Omega)=1$$

$$A \rightarrow p(A) \quad 2) p(A \cup B)=p(A)+p(B) \text{ si } A \text{ et } B \text{ disjoints}$$

$$3) p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i) \text{ pour des événements disjoints } 2 \text{ à } 2$$

Propriétés :

$$1) p(\emptyset) = 0$$

$$2) p(A^c) = 1 - p(A)$$

$$3) \forall A \text{ et } B, p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Méthode générale pour définir la fonction probabilité ou méthodes en trois étapes

- 1) Décrire l'expérience à l'aide d'éléments élémentaires simples
- 2) Ecrire l'événement dont on veut la probabilité en fonction de ces événements élémentaires
- 3) Calculer la probabilité à l'aide d'un calcul simple utilisant 5 à 6 formules.

Cas particulier : Ω de dimension finie

Exemple : un jeu avec une pièce à 2 faces. On la lance 3 fois, probabilité d'avoir 2 piles?

$$1) F = \text{"tirer face"} \text{ et } P = \text{"tirer pile"}$$

$$2) E = \text{"tirer 2 piles en lançant 3 fois la pièce"}$$

$$E = [(P \cap P \cap F) \cup (P \cap F \cap P) \cup (F \cap P \cap P)]$$

$$3) p(E) = p[(P \cap P \cap F) \cup (P \cap F \cap P) \cup (F \cap P \cap P)]$$

$$p(E) = p(P \cap P \cap F) + p(P \cap F \cap P) + p(F \cap P \cap P)$$

$$p(E) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Probabilités - Formulaire 2

Formules probas et techniques comptage

III. Probabilité conditionnelle et indépendances

a) Probabilité conditionnelle :

$$p(A \setminus B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

b) Indépendance d'événements : A et B indépendants $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

c) Théorème multiplication : $p(A_1 \cap A_2) = p(A_2 \setminus A_1) \times p(A_1)$

d) Formule des probabilités totales :

Soient $A_1, A_2 \dots A_n$ qui forment une partition de Ω et B quelconque

alors $p(B) = p(B \setminus A_1) \times p(A_1) + p(B \setminus A_2) \times p(A_2) + \dots p(B \setminus A_n) \times p(A_n)$

e) Formule de Bayes :

$$p(A_i \setminus B) = \frac{p(B \setminus A_i) \times p(A_i)}{p(B \setminus A_1) \times p(A_1) + p(B \setminus A_2) \times p(A_2) + \dots p(B \setminus A_n) \times p(A_n)}$$

IV. Techniques de comptage-Analyse combinatoire

1) Principe fondamental de comptage :

p étapes successives indépendantes avec pour chaque étape n_i résultats possibles.

Alors le nombre de résultats possibles de l'expérience N vaut :

$$N = n_1 \times n_2 \times \dots n_p$$

2) Permutations :

n objets au total. Le nombre N de permutations vaut :

a) Sans répétition : $N = n!$

b) Avec répétitions : n objets où α, β et γ objets indiscernables alors

$$N = \frac{n!}{\alpha! \times \beta! \times \gamma!}$$

3) Arrangements :

p objets tirés parmi n dans ordre donné, alors le nombre d'arrangements vaut :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots (n-p+1)$$

4) Combinaisons :

p objets tirés parmi n, alors le nombre de combinaisons vaut :

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Probabilités - Formulaire 3
VA à une dimension-loi de probabilité

I. VA à une dimension

1. Loi de probabilité

- Va discrète

Définition : la loi de probabilité de X est l'ensemble des probabilités $P(X=x)$ et qui satisfait

- $0 \leq P(X = x) \leq 1$

- $\sum_x P(X = x) = 1$

- Va continue

Définition :

Soit X une va continue

Soit $x \in [a, b]$ ($P(X=x)=0$), la probabilité que X soit compris entre x et $x+dx$ s'écrit :

$P(x < X < x+dx) = f(x)dx$ où $f(x)$ est la densité de probabilité de la va X.

Propriétés :

- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

- $f(x) \geq 0$

- Condition de normalisation : $\int_a^b f(x)dx = 1$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

2. Fonction de répartition :

- Cas discret : $F(x) = P(x \leq x)$

- Cas continu : $F(x) = P(x \leq x) = \int_{-\infty \text{ ou } a}^x f(t)dt$

Propriétés : $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

3. Lois de probabilité les plus connues

- Va discrètes :

- loi uniforme : si X prend n valeurs, $P(X) = \frac{1}{n}$

- loi binomiale $B(N, p)$: $P(X = x) = C_N^x p^x (1-p)^{N-x}$

- loi de Poisson : $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$

- Va continues :

- loi uniforme : $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$

- loi exponentielle : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ et $f(x)=0$ ailleurs

- loi normale, $N(m, \sigma)$, ou Gaussienne : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ avec $x \in \mathbb{R}$

Cas particulier : loi normale centrée et réduite où $m=0$ et $\sigma = 1$

I. VA à une dimension suite...4. Fonction d'une va

- Va discrète : X va discrète et $h(X)=Y$, fonction de X et nouvelle va discrète, alors :

$$P(Y = y_i) = \sum_{\substack{x_j \text{ avec} \\ h(x_j)=y_i}} P(X = x_j)$$

- Va continue : X va continue de densité de probabilité $f(x)$ et $h(X)=Y$, fonction de X, nouvelle va continue, correspondant à un **changement bijectif**, alors :

$$|f(x)|dx = |g(y)|dy$$

5. Espérance mathématique

- Va discrète :

$$E(x) = \sum_x x P(X=x)$$

Exemples :

- loi binomiale de paramètres N et p : $E(X)=Np$
- loi de Poisson de paramètre λ : $E(X) = \lambda$

- Va continue :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

Exemples :

- loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$: $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- loi exponentielle de paramètre λ : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

- Propriétés :

- $E[h(X)] = \sum_x h(x)P(X=x)$ avec X va discrète
- $E[h(X)] = \int_a^b h(x)f(x)dx$ avec X va continue
- Linéarité : $E(aX+b)=aE(X)+b$ où a et b constantes

6. Variances (écart quadratique ou écart type)

- Définition :

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2]$$

- Formule pratique :

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Exemples :

- loi Binomiale de paramètres N et p : $\text{Var}(X)=Np(1-p)$
- loi de Poisson de paramètres λ : $\text{Var}(X)=\lambda$
- loi exponentielle : $\text{Var}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

- Propriétés : $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ où a et b constantes
- Moments d'ordre n : $E(X^n)$

II. VA à deux dimensions

1. Définitions

- Va discrètes : loi de probabilité jointe

$$P(X = x, Y = y) = P[\{\omega / X(\omega) = x \text{ et } Y(\omega) = y\}]$$

Remarques-propriétés :

- Présentation sous forme d'un tableau.
- $0 \leq P(X = x, Y = y) \leq 1$
- C.N. : $\sum_x \sum_y P(X = x, Y = y) = 1$
- Lois marginales

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$$

- Va continues : densité de probabilité jointe

Soient X et Y deux va continues qui prennent des valeurs sur un domaine D du plan.

La densité de probabilité jointe $f(x,y)$ est définie par

$$P(x < X < x+dx, y < Y < y+dy) = f(x,y) dx dy$$

Remarques-propriétés :

- $f(x, y) \geq 0$
- $\iint_D f(x, y) dx dy = 1$
- Lois marginales

$$f_X(x) = \int_{y1}^{y2} f(x, y) dy \text{ et } f_Y(y) = \int_{x1}^{x2} f(x, y) dx$$

- Fonction de répartition :

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

2. Va indépendantes

X et Y indépendantes si $P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$ ou $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$

3. Fonctions de va

- Définition :

X et Y deux va et $h(X,Y)$ fonction de X et Y, alors $h(X,Y)$ est aussi une va

- Espérance de $h(X,Y)$:

$$E[h(X,Y)] = \sum_x \sum_y h(x,y)P(X=x, Y=y)$$

$$E[h(X,Y)] = \iint_D h(x,y)f(x,y)dxdy$$

- Exemples fondamentaux :

- $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$
- Si X et Y indépendants alors $E(XY)=E(X)E(Y)$

- Variance de $h(X,Y)$:

$$\text{Var}[h(X,Y)] = E[h^2(X,Y)] - (E[h(X,Y)])^2$$

- Exemples fondamentaux :

- $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab[E(XY) - E(X)E(Y)]$
- Si X et Y indépendantes alors $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y)$

4. Covariance et coefficient de corrélation

- Covariance:

$$\text{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

Propriété :

Si X et Y indépendants alors $\text{Cov}(X,Y)=0$

Application :

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y)$$

- Coefficient de corrélation :

$$\rho = \text{Cov}(X,Y)/\sigma_X \sigma_Y$$