

Espace probabilisé

L'ensemble fondamental – événement

Def : **expérience aléatoire** : expérience qui répétée dans les mêmes conditions ne donne pas toujours le même résultat

Exemple : tirer une carte dans un jeu de 52 cartes

Compter le nombre de particules émises par un radio élément

Noter la distance entre le point d'impact d'une flechette et le centre de la cible

Ensemble fondamental ou encore espace des épreuves noté Ω

Il s'agit de l'ensemble des résultats de l'épreuve

Exemple: $\Omega = \{ \text{as pique, as cœur, ...} \}$

$\Omega = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$

$\Omega = \{ x \mid x \text{ appartient à } \mathbb{R}^+ \}$

Il est à noter que Ω peut être de dimension finie (les cartes) ou infinie (particule ou flechette)

Événement c'est un sous-ensemble de Ω notion fondamentale

Ex : événement A = « tirer un pique »

Événement B « compter un nombre pair de particules émises »

Événement C « approcher le centre de la cible de moins de $r/2$ »

Remarque : à partir d'événements A et B, on peut construire d'autres événements

Complementaire note A^c ou A 'barre' pour les carte A barre tirer autre chose que du pic

Union de deux evenement $A \cup B$ le ou etant pas exclusif

Insertion $A \cap B$

Evenement A _ evenement B $A - B$

2) ω = evenement certain

$\emptyset$ 'barré' impossible

3) un evenement de type tirer un as est couremenet assimile en sous ensemble

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A$$

$$\text{Associativite } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$\text{Commutativite } A \cup B = B \cup A$$

$$\text{Distributivite : } (A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$$

1) Definition d une focntion probabilite

Avant d'effectuer une expérience on ne sait pas si un événement A sera réalisé ou non. La donnée d'une probabilité permet de mesurer les chances pour que A se réalise.

- a) Déf. soit une expérience associée à un ensemble fondamental Ω et à l'ensemble des événements $\mathcal{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P})$ si l'application $p : \mathcal{P} \rightarrow [0,1]$ vérifie :
- 1) $p(\Omega) = 1$
 - 2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ si A et B sont disjoints
 - 3) $p(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$ pour une suite d'événements disjoints

b) Propriétés :

- 1) $p(\emptyset) = 0$
 - 2) $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
 - 3) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ A et B quelconques
- On a $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

c) Ex. on veut trouver la probabilité de tirer un as

On va définir un événement élémentaire !

On le note $A = \text{« tirer une carte donnée »}$

On va chercher $p(A) = ?$

On a $\Omega = \text{« réunion de 52 événements élémentaires disjoints »}$

Où $p(\Omega) = 1 = \text{somme des probabilités de chaque événement élémentaire}$
 $= 52 \times \text{probabilité d'une carte donnée (car équiprobabilité des événements élémentaires)}$

Donc $p(A) = 1/52$

On a un événement $E = \text{« tirer un as »}$ et on veut $p(E) = ?$

$P(E) = p(\text{as carreau}) + p(\text{as trefle}) + \dots = 4/52$

On remarque que la probabilité de tirer un as

$p(E) = \text{nb de cartes favorables} / \text{nb de cartes possibles}$ si équiprobabilité

2) méthode pratique pour définir la fonction probabilité

a) cas ou omega est de dimension fini

on a $\omega = \{w_1, w_2, w_3, \dots\}$ avec w_i evenement elementaire

Methode : A chaque evenement elementaire w_i on va associer un nombre reel p_i appeler proba de w_i telle que - $0 \leq p_i \leq 1$

$$\text{Somme } i \text{ de } 1 \text{ a } n \text{ de } p_i = 1$$

La probabilite d'un evenement E est la somme des probabilite des w_i qu'il contient

Exemple : $p_1 = p_2 = \dots = 1/52$

Et $p(E) = p(\text{« tirer un as »}) = p(\text{as cœur}) + p(\text{as carreau}) = 4/52$

Cas particulier : si w_i sont equiprobables

Comme somme de i de 1 a n $p_i = 1 \rightarrow n \cdot p_i = 1 \rightarrow p_i = 1/n$

D'où $p(E) = \text{nb d evenement } w_i \text{ contenu dans E} / \text{nb evenement } w_i \text{ contenu dans } \omega$
 $= \text{nb cas favorable} / \text{nb de cas possible}$

b) cas ou omega est infini mais denombrable

on a toujours $\omega = \{w_1, w_2, \dots, w_{\infty}\}$

a chaque evenement elementaire w_i on associe la probabilite p_i avec

I. $0 \leq p_i \leq 1$

II. Somme i de 1 a infini de $p_i = 1$

Pas d'evenement equiprobable dans ce cas

Ex : on lance une piece de monnaie et on compte le nombre de lancer avant d'avoir pile

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, \infty\}$

On a $p_1 = p(\text{evenement } w_1) = 1/2$

$$p_2 = 1/2 \cdot 1/2 = 1/2^2$$

$$p_3 = 1/2^3$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \text{ car on a } 1/2 \cdot 1/(1-1/2) = 1$$

c) Cas les plus complique

Demarche en 3 etape : - decire l experience a l aide d evenement elementaire (un ou deux)

- Ecrire l evenement dont on cherche la probabilite en fonction des evenement elementaire
- Calculer la probabilite en utilisant les 5 ou 6 formule du cours

3) probabilite conditionnelle notion d independance

a) Probabilite conditionnelle :

on appelle la probabilite conditionnelle de l evenement A sachant l evenement B la qualiter

$$p(A|B) = p(A \cap B) / p(B)$$

le rapport $p(A \cap B) / p(B)$ donne la probabilite relative de l evenement A dans l espace reduit B

ex : A = tirer un roi

B = tirer une carte superieur a 10 (v d r as)

$$\begin{aligned} P(A|B) &= p(A \cap B) / p(B) = p(A) / p(B) \text{ car } A \text{ inclus dans } B \\ &= 4/52 / 16/52 = 4/16 = 1/4 \end{aligned}$$

b) Independance d'evenement

Def : un evenement B est dit independant d un evenement A si la probailite que B se produise ne depend pas du fait que A se produise ou non. Dans ce cas $p(B|A) = p(B)$ si A et b independant $p(A \cap B) = p(A) * p(B)$

Ex : une urne avec 4 rouge et 3 jaune. Tirage avec remise de 2 bille on veut calculer la probabilité de tirer rouge et jaune.

- 1) R_i tirer rouge au ieme tirage
 J_i tirer jaune au ieme tirage
- 2) $E = \text{tirer rouge puis jaune} = R_1 \wedge J_2$
- 3) $P(E) = p(R_1 \wedge J_2) = p(R_1) * p(J_2)$ car R_1 et J_2 independant car tirage avec normal = $4/7 * 3/7 = 12/49$

c) Theoreme de la multiplication

On a $p(A_1 \wedge A_2) = p(A_2 | A_1) * p(A_1)$

Ex : urne avec 4 rouge et 3 jaune

Tirage sans remise

Probabilité d avoir 2 rouge ?

- 1) R_i = tirer rouge au ieme tirage
- 2) $E = R_1 \wedge R_2$
- 3) $P(E) = p(R_1 \wedge R_2) = p(R_2 | R_1) * p(R_1) = 3/6 * 4/7 = 2/7$

Extension a 3 evenemnt :

$P(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) = p(A_3 | (A_1 \wedge A_2)) * p(A_2 | A_1) * p(A_1)$

d) Formule des probabilité total

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ n evenement realisant une partition de Ω $\Leftrightarrow A_i$ sont disjoint 2 a 2 et union des $A_i = \Omega$

Soit B un evenement quelconque de Ω alors $B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots)$

$= B \cap A_1 \cup B \cap A_2 \cup B \cap A_3 \dots$

$P(B) = p(B \cap A_1 \cup B \cap A_2 \cup B \cap A_3 \dots) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) \dots$

$= p(B | A_1) * p(A_1) + p(B | A_2) * p(A_2) \dots$

Interet : on a $p(b)$ connaissant - toute les cause A_i

- Les probabilite de transition de A_i à B

e) Formule de bayes

$$P(A_i|B) = \frac{p(B|A_i) p(A_i)}{p(B|A_1)p(A_1) + p(B|A_2)p(A_2)}$$

Exemple on a 3 machine A et B et C qui produisent 50% 30% et 20% du nombre total de visse. Le % de defect est respectivement de 3 4 et 5 %

- 1) On prend une visse au hasard, quelle est la proba qu'elle soit defectueuse ?
 - a) M = la visse est defectueuse A et B et C = la vis est produite par A, B, C
 $A \cup B \cup C$ partition de ω
 - b) Pproba total
 - c) $P(M) = 0.03*0.5 + 0.04*0.3 + 0.05*0.2$
 $= 3.7\%$
- 2) Si une visse est defectueuse quelle est la probabilite qu'elle soit produite par A