

Fiche Probabilité

Chapitre 2 : Variables aléatoires

VA à une dimension

- VA discrète
 - Définition : une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $\omega \rightarrow X(\omega)$ est une VA discrète si l'ensemble des valeurs prises par X est fini ou infini mais dénombrables ou encore $X(\omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ un entier.
 - $0 \leq P(X = x) \leq 1$
- VA continue
 - Densité de probabilité : Soit X une VA continue de $\Omega \rightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $\omega \rightarrow X(\omega)$. Soit $x_0 \in [a, b]$ ($P(X = x_0) = 0$), la probabilité que X soit compris entre x_0 et $x_0 + dx$ s'écrit : $P(x_0 \leq X \leq x_0 + dx) = f(x_0)dx$. La fonction $f(x_0)$ est la densité de probabilité de X.
- Fonction de répartition : c'est la fonction F de $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ et $x \rightarrow P(X \leq x)$
 - Cas discret : Probabilité d'une VA donnée par la connaissance des $P(X=x)$
 - Cas continue : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ d'où $F'(x) = f(x)$, Probabilité d'une VA donnée par la densité de probabilité de $f(x)$ ou de la fonction de répartition $F(x)$

Lois de probabilité

- VA discrètes :
 - Loi Uniforme : $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$, avec $P(X = x_i) = cste$
 - Loi binomiale : $P(X = x) = C_N^x p^x (1-p)^{N-x}$: Loi binomiale de paramètres N et p : B(N,p). Utilisation de la loi binomiale :
 - Expérience avec 2 résultats possibles (succès : p et échec : q)
 - N réalisations successives
 - N réalisations indépendantes
 - Loi de Poisson $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ Avec $\lambda = N \cdot p$
- VA continues :
 - Loi Uniforme : $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $f(x) = cste$
 - Loi exponentielle :
 - $\lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$, 0 ailleurs
 - Fonction de répartition : $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$, 0 ailleurs
 - Loi de Gauss ou loi Normale :
 - $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ avec x : réel

- Valeur de $f(x)$ à mi-hauteur : $\frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}$