

Probabilités

Chapitre I

Espace probabilisés

I) Ensemble fondamental
Evénement.

II) Définition de la fonction probabilité

III) Probabilité conditionnelle / indépendance

IV) Techniques de comptage - Analyse combinatoire

Chapitre II

variables aléatoires (v.a.)

I) v.a. à une dimension: définition, lois les plus connues, espérance, variance

II) v.a. à 2 dimensions

Chapitre III

Génération de nombre aléatoire

Espaces Probabilisés

I) Ensemble fondamental - Evénement

• Expérience aléatoire:

Expérience, qui, répétée dans les mêmes conditions, ne donnent pas toujours le même résultat.

Exemples: Tirer une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes

• Compter un nombre de particules émises par un radioélément entre les instants 0 et T

• Noter la distance entre le point d'impact

d'une fléchette et le centre de la cible.

Ensemble fondamental:

noté Ω (ou espace des épreuves)

L'ensemble des résultats possibles, de l'expérience

Exemples: • $\Omega = \{AsP, AsT, \dots, 2P, 2T, 2C, 2K\}$

• $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$

• $\Omega = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq R\} = [0, R]$
où R est le rayon de la cible

Remarque: il est à noter que Ω peut être fini ou infini $\rightarrow$ cas où Ω est dénombrable (cas des particules)

$\rightarrow$ cas où Ω est indénombrable (cas de la cible)

Dans ce dernier cas, on dit que Ω a la puissance du continu.

Événement:

C'est un sous-ensemble de Ω .

Notion fondamentale en probabilité

Exemples: • Événement $A =$ "tirer un pique"

$A = \{AsP, Rp, \dots, 2P\}$

• $B =$ "compter un nombre pair de particules"

• $C =$ "approcher le centre de la cible de $d \leq \frac{1}{2}$ "

Remarques:

1) À partir de deux événements A et B , on peut créer d'autres événements.

- Complémentarité d'un événement A : notation $\frac{A^c}{A}$

A^c
ou
 $\overline{A}$



Si $A =$ "tirer un pique"

$A^c =$ "tirer autre carte que pique"

- Union de 2 événements:

Notation: $A \cup B$



$A \cup B$ = l'événement A ou l'événement B réalisé (ou n'est pas exclusif).

Si B = "tirer un as"

Alors $A \cup B$ = "13 piques, As T, As K, As C"

Intersection de 2 événements

notation: $A \cap B$



$A \cap B$ = l'événement A et l'événement B sont réalisés

$A \cap B$

Exemple: jeu de 52 cartes, $A \cap B = \{\text{As de pique}\}$

- Événement A moins événement B: $A - B$



$$A \cap B^c = A - B$$

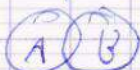
jeu de 52 cartes: $A - B = \{R, D, \dots, 2P\}$

2) Ω = événement certain

$\emptyset$ = événement impossible

3) Un événement du type "tirer 1 as" est certainement assimiler au sous ensemble

$B = \{\text{As p, As K, As C, As T}\}$. D'où l'utilisation de dessin: $\rightarrow$ on peut raisonner avec des dessins



$\rightarrow$ on peut aussi utiliser les lois de la théorie des ensembles.

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Associativité: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Commutativité: $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$

Distributivité : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Identities : $A \cup \emptyset = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
 $A \cup \Omega = \Omega$ $A \cap \Omega = A$

Complémentarité

$A \cup A^c = \Omega$ $A \cap A^c = \emptyset$
 $(A^c)^c = A$ $\Omega^c = \emptyset$ $\emptyset^c = \Omega$

II Définition d'une fonction probabilité

1) Fonction probabilité :

Avant d'effectuer l'expérience, on ne sait pas si l'événement A sera réalisé ou non.

La donnée d'une probabilité permet de mesurer les chances pour que A se réalise.

a) Définition :

- Soit une expérience, un ensemble fondamental Ω et $\mathcal{A}$ l'ensemble des événements.

p est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si l'application

$p: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ vérifie 1) $p(\Omega) = 1$

$A \rightarrow p(A)$

2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

si A et B disjoints

3) $p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$ si les événements A_i sont disjoints 2 à 2

b) Propriétés

1) $p(\emptyset) = 0$

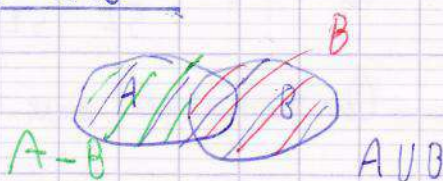
2) $p(A^c) = 1 - p(A)$

3) A et B quelconques.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Démonstration:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$



Aucune intersection entre

$A \setminus B$ et $B \Rightarrow A \setminus B$ et B sont disjoints.

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p[(A \setminus B) \cup B] = p(A \setminus B) + p(B) \\ &= p(A) - p(A \cap B) + p(B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \end{aligned}$$

c) Exemple:

Soit 1 jeu de 52 cartes.

On veut calculer la probabilité de tirer un As.

→ Événement simple: $\textcircled{A}$ = "tirer une carte donnée"

On va remarquer que l'ensemble fondamental correspond à la réunion de 52 événements simples disjoints.

On a vu que $p(\Omega) = 1$

Donc $p(\Omega) = 1 = \sum$ des probabilités pour chaque événements simples.

$$\begin{aligned} &= p(\text{tirer 1 as } p) + p(\text{tirer 1 as } T) + \dots \\ &= 52 \times p(\text{"tirer une carte donnée"}) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } p(A) = \frac{1}{52}$$

$\textcircled{2}$ → Soit E = "tirer un as"

$$E = \{ (As_p) \cup (As_T) \cup (As_K) \cup (As_C) \}$$

$$\textcircled{4} \rightarrow p(E) = p((As_p) \cup (As_T) \cup (As_K) \cup (As_C))$$

On remarque que les événements sont disjoints

$$\text{donc: } p(E) = p(As_p) + p(As_T) + p(As_K) + p(As_C)$$

$$\text{On a vu que } p(\text{"tirer une carte donnée"}) = \frac{1}{52}$$

$$\text{donc } p(E) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{4}{52}$$

On remarque que $p(\text{tirer un as}) = \frac{\text{nbre cas favorables}}{\text{nbre cas possibles}}$

Événements équiprobables

On vient de suivre la démarche suivante en 3 étapes:

- ① Décrire l'expérience à l'aide d'événements élémentaires simples 50% du problème.
- ② Écrire l'événement dont on cherche la probabilité en fonction de ces événements élémentaires.
- ③ Calculer la probabilité à l'aide d'un calcul simple en utilisant les relations données

② Méthode pratique pour définir la fonction probabilité

a) Cas où Ω est de dimension finie:

Alors $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$

A chaque événement élémentaire ω_i , on associe un nombre réel p_i , appelé probabilité de ω_i tel que:

$$1) 0 \leq p_i \leq 1$$

$$2) p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des ω_i qu'il contient

Exemple: 52 cartes. $\omega_i = \text{"tirer une carte donnée"}$
où $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_{52} = \frac{1}{52}$

Si on cherche la probabilité d'avoir 1 as?

$$\begin{aligned} p(E) &= p_{A \cap T} + p_{A \cap C} + p_{A \cap K} + p_{A \cap P} \\ &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{4}{52} \end{aligned}$$

Cas particulier

Si les événements élémentaires ω_i sont équiprobables

$\Rightarrow p_i = \text{constante}$

$$\text{or } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \Rightarrow p_i \left(\sum_{i=1}^n 1 \right) = 1$$

$$\Rightarrow p_i \times n = 1 \Rightarrow p_i = \frac{1}{n}$$

ou encore $p(E) = \frac{\text{nbre d'événements } \omega_i \text{ contenus dans } E}{\text{nbre de cas favorables}}$

$$= \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

b) Cas où Ω est infini mais dénombrable

On a $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\infty\}$

A chaque événement élémentaire ω_i on associe un nombre réel p_i avec

$$1) 0 \leq p_i \leq 1$$

$$2) \sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$$

Attention: pas d'événements équiprobables

Exemple:

On lance 1 pièce

On compte le nbre de lancers avant d'avoir pile.

$\omega_i = \text{"nombre de lancers"}$

alors $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$ par exemple: $p_1 = \frac{1}{2}$ $p_2 = \frac{1}{4}$...

$$p_n = \frac{1}{2^n}$$

On a toujours $0 \leq p_i \leq 1$

Mais on doit vérifier que $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

Donc p_i est une probabilité

c) Cas les plus compliqués:

On utilise la démarche en 3 étapes utilisées précédemment

III) Probabilités conditionnelles et indépendances:

a) Probabilité conditionnelle

On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant l'événement B la quantité:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Le rapport $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ donne la probabilité de l'événement A dans l'espace réduit B.

Exemple: A = "tirer un roi"

B = "tirer une carte supérieure à 10"

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \rightarrow \text{car } A \subset B$$
$$= \frac{4/52}{16/52} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ou } \frac{4}{16} = \frac{\text{nbre de cas favorable}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

b) Indépendances d'événements

Définition: Un événement B est dit indépendant d'un événement A si la probabilité que B se produise ne dépend pas du fait que A se produise ou non.

$$\text{Alors } P(B|A) = P(B) \text{ or } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

$$\text{donc } P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

$$A \text{ et } B \text{ indép.} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) p(B)$$

c) Théorème de la multiplication:

on a: $p(A_1 \cap A_2) = p(A_2 | A_1) p(A_1)$

Si on a 3 événements:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_3 | A_1 \cap A_2) p(A_2 | A_1) p(A_1)$$

Exemple:

Soit une urne avec 4 boules rouges et 3 jaunes

Tirage sans remise

Probabilité d'avoir 3 rouges?

→ Événement élémentaire: $R_i =$ "tirer une rouge au $i^{\text{ème}}$ coup."

→ $E =$ "tirer 3 rouges" = $R_1 \cap R_2 \cap R_3$

→ $p(E) = p(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = p(R_3 | R_1 \cap R_2) p(R_2 | R_1) p(R_1)$
th. multi

$$p(E) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$$

Si tirage avec remise:

$$p(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = p(R_1) p(R_2) p(R_3) \text{ indép.}$$

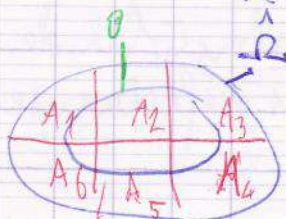
$$= \left(\frac{4}{7}\right)^3$$

d) Formule des probabilités totales

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n événements qui forment une partition ~~non~~ de Ω

Alors ces événements sont disjoints

2 à 2 et $\bigcup A_i = \Omega$



Soit B un événement quelconque de Ω

Alors. $B = B \cap \Omega$

$$= B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

$$= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$

par distributivité

$(B \cap A_i)$ sont disjoints 2 à 2.

donc $p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n)$ car disjoints

d'après théorème multiplication:

$$p(B) = p(B \setminus A_1)p(A_1) + p(B \setminus A_2)p(A_2) + \dots + p(B \setminus A_n)p(A_n)$$

Intérêt: on peut calculer $p(B)$ en connaissant:

- les probabilités $p(A_i)$ (causes)

- les probabilités de transition $p(B \setminus A_i)$

e) Formule de Bayes

on a:
$$p(A_i \setminus B) = \frac{p(B \setminus A_i)p(A_i)}{p(B \setminus A_1)p(A_1) + \dots + p(B \setminus A_n)p(A_n)}$$

car
$$p(A_i \setminus B) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B \cap A_i)}{p(B \setminus A_1)p(A_1) + \dots} \leftarrow \text{commutativité}$$
$$= \frac{p(B \setminus A_i)p(A_i)}{p(B \setminus A_1)p(A_1) + \dots} \leftarrow \text{th multiplication}$$

Intérêt: renverser le conditionnement, à partir du résultat trouver les causes

Exemples:

Soient 3 machines A, B et C qui fabriquent 50%, 30% et 20% du nombre total de vis

Le pourcentage de vis défectueuses est respectivement de 3, 4 et 5%

1) Si une vis est prise au hasard, proba qu'elle soit défectueuse?

① $M =$ "la vis est défectueuse"
 A, B et $C =$ "la vis est produite par" $\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$

② $M = (M \cap A) \cup (M \cap B) \cup (M \cap C)$

③
$$p(M) = p(M \setminus A) \cdot p(A) + p(M \setminus B) \cdot p(B) + p(M \setminus C) \cdot p(C)$$

$$\downarrow = 0,03 \quad 0,5 + 0,04 \times 0,3 + 0,05 \times 0,2$$

$$p_{\text{totales}} = 3,7\%$$

2) Si une vis est défectueuse, probabilité qu'elle soit produite par A?

$\rightarrow E = A \setminus M$

$$\rightarrow p(A \setminus M) = \frac{p(M \setminus A) \cdot p(A)}{p(M)} = \frac{0,03 \times 0,5}{0,037} = 40,5\%$$

Bayes

cours 3

IV Techniques de comptage - Analyse combinatoire

L'objectif est de compter rapidement le nombre d'éléments d'un ensemble et d'évaluer le nombre de résultats possibles d'une expérience.

① Principe fondamental de comptage:

On va ~~déposer~~ considérer une expérience avec p étapes, successives et indépendantes.

On va supposer que l'on a:

- 1^{ère} étape: n_1 résultats possibles

- 2^{ème} " : n_2 // //

- :

- $p^{\text{ème}}$ étape possible: n_p

Alors le nbre de résultats possibles de l'expérience

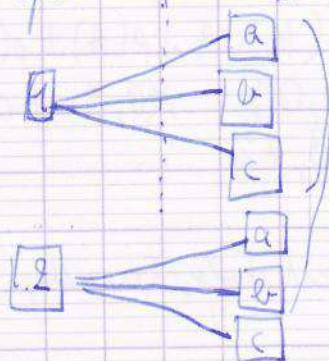
N vaut $N = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_p$

On prend 2 cartes avec:

- 2 cartes $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ (1^{er} tirage)
- 3 // $\boxed{a}$ $\boxed{b}$ $\boxed{c}$ (2^{e} //)

1^{ère} étape

2^e étape



6 résultats possibles

$$= 2 \times 3$$

$$N = m_1 \times m_2$$

② Permutation

Définition: Une permutation de n objets, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ est un arrangement de ces n objets dans un ordre donné.

1^{er} exemple: $a_1, a_2, a_3 \rightarrow a_n$ une permutation
 $a_2, a_1, a_3 \rightarrow a_n$ // autre //

a) Permutations sans répétition: (objets sont discernables)

Ex: On va calculer le nbre de mots formés de 3 lettres formés de a, b et c

$N = n!$ objets discernables

b) Permutations avec répétitions

On a des objets identiques.

Si on reprend l'exemple du mot de 3 lettres avec cette fois les lettres a, a, b.

Dans ce cas on peut former
 $aab, aba, baa \rightarrow 3$ mots

Si par exemple, on identifie les deux a : a_1 et a_2
 dans ce cas, $N = 2 \times 2 = 6$

mais si on ne peut distinguer les 2 a :

$$N = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

2 $\rightarrow$ nombre de permutations sur les 2 a

Si on généralise, avec α objets ou β et γ objets
 sont indiscernables

$$N = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!}$$

Ex. ELECTRICITE

$$N = \frac{11!}{3! 2! 2! 2! 1!}$$

③ Arrangements:

Définition:

Soient n objets

Un arrangement de p objets est obtenu en
 tirant p objets parmi les n objets et en les rangeant

$$N = A_n^p = n \times n-1 \times \dots \times n-p+1$$

④ Combinaisons:

Définition:

Soient n objets

Une combinaison de p objets est obtenue en tirant
 p objets parmi n .

$$\begin{aligned} & \text{nombre de combinaison} \\ &= \frac{\text{nombre d'arrangements } (A_n^p)}{\text{nombre de permutation de } p \text{ objets } (p!)} \\ &= \frac{A_n^p}{p!} \end{aligned}$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

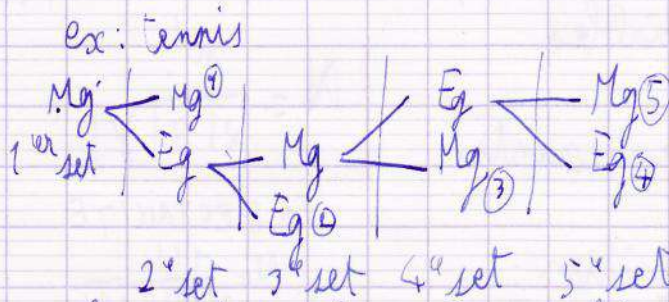
⑤ Formules:

$$\begin{aligned} C_n^0 &= 1 & C_n^p &= C_n^{n-p} \\ C_n^1 &= n & C_n^p &= C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \end{aligned}$$

Formule du binôme: $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$

⑥ Utilisatⁿ d'un arbre

Un arbre permet d'énumérer tous les résultats possibles d'une expérience se déroulant en pls. étapes.



nbre de déroulements possibles: $5 \times 2 = 10$