

De même, $f_y(y) = \frac{2\sqrt{a^2 - y^2}}{\pi a^2}$ si $y \in (-a, +a)$

$= 0$ ailleurs

Ici, pas de loi uniforme sur l'intervalle $[-a, a]$

d) Fonction de répartition à 2 dimensions

Cas à 1 dimension : $F(x) = P(X \leq x)$

Ici, $\left[F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \right]$

Probabilité (fin)

② v.a. indépendantes

a) définition

Rappel : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ si A et B indépendants

La v.a. X et Y sont indépendantes si $\underbrace{P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)}_{\text{v.a. discrètes}}$

ou $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$) variables continues

Dans le cas où X et Y sont des v.a. indépendantes

connaissance de $P(X=x, Y=y) \Leftrightarrow$ connaissance de $P(X=x)$ et $P(Y=y)$
 $f(x, y) \Leftrightarrow$ des densités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$

b) Exemple : + ce discut : loi de probabilité jointe multivariée (valeurs numériques associées). Pour montrer la dépendance il faut trouver un exemple où $P(X=x_1, Y=y_2) \neq P(X=x_1)P(Y=y_2)$

Pour montrer l'indépendance, on doit vérifier la relation
 $P(X=x, Y=y) = P(X=x) P(Y=y)$

Pour toutes les valeurs de X et Y

* Cas de v.a. continue : on reprend l'exemple de la table

on avait trouvé $f(x,y) = \frac{1}{\pi a^2}$ pour $\begin{cases} -a \leq x \leq +a \\ -a \leq y \leq +a \end{cases}$ alors $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$

dans ce cas X et Y dépendants. Normal car $X^2 + Y^2 \leq a^2 \Rightarrow X$ et Y dépendants

③ Fonctions de variables aléatoires

a) Définition :

Soit (X, Y) un couple de v.a.

Soit h une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto h(x,y)$

alors l'application de $\Omega \xrightarrow{h} \mathbb{R}$
 $\omega \mapsto h(X(\omega), Y(\omega))$

est aussi une v.a., notée $h(X, Y)$

Exemple : $h(X, Y) = X + Y, \quad XY, \quad \max(X, Y)$

(2)

b) loi de probabilité de $h(X, Y)$

* Cas des v.a. discrètes :

La loi de probabilité de $h(X, Y)$ se calcule :

- à partir de $P(X=x, Y=y)$
- assez simple dans le cas discret

Méthode sur 1 cas simple : on pose $h(X, Y) = X + Y = S$ On considère X et Y des v.a. dans $\mathbb{N}$ et indépendantesJe cherche la loi de $h(X, Y) = X + Y = S$

$$P(X+Y=s) = P(\{(X=0, Y=s) \cup (X=1, Y=s-1) \dots \cup (X=s, Y=0)\})$$

Événements disjoints

$$\text{alors } P(X+Y=s) = P(X=0, Y=s) + P(X=1, Y=s-1) + \dots + P(X=s, Y=0)$$

De plus, X et Y sont des v.a. indépendantes

$$\text{donc } P(X+Y=s) = P(X=0)P(Y=s) + P(X=1)P(Y=s-1) + \dots + P(X=s) \times P(Y=0)$$

$$\text{au encue : } \left[P(X+Y=s) = \sum_{x=0}^s P(X=x) P(Y=s-x) \right]$$

* Cas continus :

c) Espérance de $h(x, y)$:

Rappel dans le cas de v.a. à une dimension

$$\begin{aligned} E(h(x)) &= \sum_x h(x) P(x=x) \\ &= \int h(x) f(x) dx \end{aligned}$$

On va faire une extension de ces propriétés dans le cas de v.a. à deux dimensions :

si X et Y sont discrets : $E(h(x, y)) = \sum_{(x, y)} h(x, y) P(X=x, Y=y)$

" continues : $E(h(x, y)) = \iint_{(x, y) \in D} h(x, y) f(x, y) dx dy$

Exemples fondamentaux :

$$\rightarrow \boxed{E(ax + by) = a E(x) + b E(y)} \quad \text{avec } a, b \text{ cste}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} E(ax + by) &= E(h(x, y)) = \iint (ax + by) f(x, y) dx dy \\ &= a \iint x f(x, y) dx dy + b \iint y f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned}
E(aX + bY) &= a \int_x x \left(\int_y f(x, y) dy \right) dx + b \int_y y \left(\int_x f(x, y) dx \right) dy \\
&= a \int_x x f_X(x) dx + b \int_y y f_Y(y) dy \\
&= a E(X) + b E(Y)
\end{aligned}$$

→ si X, Y indépendants, alors $E(XY) = E(X) E(Y)$

Démonstration cas discret

$$\begin{aligned}
E(X, Y) &= E(h(X, Y)) = \sum_x \sum_y xy P(X=x, Y=y) \\
&= \sum_x \sum_y P(X=x) P(Y=y) \\
&= \left(\sum_x x P(X=x) \right) \left(\sum_y y P(Y=y) \right) = E(X) E(Y)
\end{aligned}$$

d) Variance de $h(X, Y)$

Rappel: $\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$

Dans notre cas pour $h(X, Y)$, on aura :

$$\text{Var}[h(x,y)] = E[(h(x,y) - E(h(x,y)))^2] = E[(h(x,y) - E(h(x,y)))]^2 = (E(h(x,y)))^2$$

$$= \sum_x \sum_y (h(x,y))^2 P(x=x, y=y)$$

$$= \left(\sum_x \sum_y h(x,y) P(x=x, y=y) \right)^2 \quad \text{cas de v.a. disjoints}$$

$$= \int \int_{(x,y) \in \mathcal{D}} (h(x,y))^2 f(x,y) dx dy$$

$$= \int \int_{(x,y) \in \mathcal{D}} h(x,y)^2 f(x,y) dx dy$$

$$= \left(\int \int_{(x,y) \in \mathcal{D}} h(x,y) f(x,y) dx dy \right)^2 \quad \text{cas de v.a. continues}$$

Exemple : $\text{Var}(ax + by) = ?$

$$\text{Var}(ax + by) = E[(ax + by)^2] - (E(ax + by))^2$$

$$= E(a^2 x^2 + 2abxy + b^2 y^2) - (aE(x) + bE(y))^2$$

$$= a^2 E(x^2) + 2ab E(xy) + b^2 E(y^2)$$

$$= a^2 (E(x))^2 + 2ab E(x)E(y) + b^2 (E(y))^2$$

$$= a^2 [E(x^2) - (E(x))^2] + b^2 [E(y^2) - (E(y))^2]$$

$$+ 2ab [E(xy) - E(x)E(y)]$$

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab [E(XY) - E(X)E(Y)] \quad (4)$$

Si X et Y sont indépendants, alors $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y)$

(4) covariance et coefficient de corrélation

a) Covariance

Définition : On a pair deux v.a. X, Y ,

$$[\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)]$$

Propriétés : si X et Y sont indép. alors $\text{cov}(X, Y) = 0$

On peut aussi écrire :

$$\left[\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{cov}(X, Y) \right]$$

b) Coefficient de corrélation :

Def : Le coeff de corrélation :

Définition : Le coeff de corrélation est le

rapport :

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

On peut montrer que $-1 \leq \rho \leq +1$

Deux cas particuliers : $\left\{ \begin{array}{l} - X \text{ et } Y \text{ indep} \Rightarrow \rho = 0 \end{array} \right.$

ρ est une mesure
du degré
d'indép de X et Y

$- X$ et Y sont liés dép. par exemple

$$X = Y$$

$$\text{on a } \rho = \frac{E(X^2) - (E(X))^2}{\sigma_X \sigma_X}$$

$$= \frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(X)} = 1$$