

Chap II Variables Aléatoires

I) Variable aléatoire à 1 dimension

1) Def: Soit 1 expérience aléatoire et Ω l'ensemble fondamentale

Une application

$$\boxed{\begin{array}{l} X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto X(\omega) \end{array}}$$

est une variable aléatoire
(v.a.)-discrète
si l'ensemble des valeurs
prises par X est fini ou
dénombrable.

$$X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

• Soit une application $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une v.a. continue si
 $\omega \mapsto X(\omega)$ l'ensemble des valeurs
prises par $X(\omega)$ est un
intervalle de $\mathbb{R}$, éventuellement
 $\mathbb{R}$ lui-même

Exemples: On lance 2 dés

Soit X la variable aléatoire = "Somme des pts obtenue avec 2 dés"
 X est une applications de Ω et $\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$ où

$$\Omega = \{36 \text{ couples } (i, j) \text{ avec } 1 \leq i \leq 6 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$$

Remarque: On peut définir une infinité de variable aléatoire

Exemple Y = "la somme des carrés"

b. avec des v.a. discrète on va calculer.

la variable aléatoire $\xrightarrow{\quad} P(X=x_i) \xrightarrow{\quad} \uparrow$ valeur numérique attribuée

Exemple : Taille d'un individu.

Ω = ensemble des habitants de la planète.

On tire une personne au hasard.

L'application $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

et ω = "Choisir la personne $i \rightarrow X(i)$ = taille de i ."

Est-elle discrète ou continue ?

Tout dépend de la précision de mesure.

- si on considère le cm.

$X(\omega)$ varie de 40 cm à 240 cm. } v.a. discrètes

$\Rightarrow$ 200 valeurs discrètes

} valeurs isolées.

- Si on considère le μm .

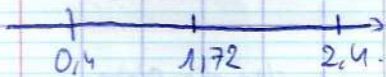
$X(\omega)$ varie de $0,4 \cdot 10^6 \mu\text{m}$ à $2,4 \cdot 10^6 \mu\text{m}$.

$\Rightarrow 2 \cdot 10^6$ valeurs : 1 traitement en discret trop lourd pour le calcul des

$\Rightarrow$ v.a. continue $2 \cdot 10^6 P(X=x_0)$

- Si on considère le m

$X(\omega)$ réelle compris entre 0,4 et 2,4 m.



• $P(X=x_0)=0$ car personne n'a la taille exacte de 1,72000
par contre on peut définir

$P(1\text{m}70 < X < 1\text{m}72) \neq 0$.

- durée de vie de composants électriques

Soit Ω : "ensemble d'un grand nb de composants électriques"

L'application $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

ω = "Choisir un composant" $\rightarrow$ durée de vie | est une v.a.

2) Loi de probabilité.

2.1) Cas d'une variable aléatoire discrète

X est une v.a. qui prend des valeurs isolées $x_1, x_2, \dots, x_n$

Définition (v.a.d.)

La loi de proba de x est l'ensemble des probas $P(X=x_i)$ ou $P(\{\omega \mid X(\omega) = x_i\})$ qui satisfait :

$$- 0 \leq P(X=x_i) \leq 1.$$

$$- \sum_{i=1}^n P(X=x_i) = 1 \quad (\text{condition de NORMALISATION})$$

Exemple: v.a.d.

Soient 2 dés

Soit 1 v.a., X : "Somme des pts obtenus avec 2 dés"

et soit la loi de proba Ω : "36 couples équiprobables"

x_i	épreuves $\{\omega \mid X(\omega) = x_i\}$	Proba $P(X=x_i)$
2	(1,1)	1/36
3	(1,2) (2,1)	2/36
4	(2,2) (1,3) (3,1)	3/36
5	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	4/36
6	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	5/36
7	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	6/36
8	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	5/36
9	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	4/36
10	(4,6) (5,5) (6,4)	3/36
11	(5,6) (6,5)	2/36
12	(6,6)	1/36

Remarque 1: On peut définir $A_i = \text{"le dé 1 donne } i\text{"}$
 $B_i = \text{"le dé 2 donne } i\text{"}$

$$\{X=2\} = \{A_1 \cap B_1\}$$
$$P(X=2) = P(A_1 \cap B_1) \text{ indépendants?}$$
$$P(X=2) = P(A_1) \times P(B_1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\{X=3\} = \{(A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1)\}$$

$$P(X=3) = P((A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1)) \text{ disjoints}$$
$$= P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1) \text{ indépendant}$$

$$P(X=3) = P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_1)$$
$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$

etc

dernière étape: condition de normalisation (C.N)

$$\sum_{i=2}^n P(X=x_i) = 1$$

C.N est vérifiée.

$$P(X=2) + P(X=3) + \dots + P(X=12) = \frac{36}{36} = 1.$$

Remarque 2: On peut définir

$$\{X \leq 3\} = \{X=2\} \cup \{X=3\} \text{ disjoints}$$

$$P(X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(3 \leq X \leq 4) = P(X=3) + P(X=4)$$

$$\Delta \neq P(3 < X < 4) \text{ car v.u.d}$$

2.2) Variable aléatoire continue.

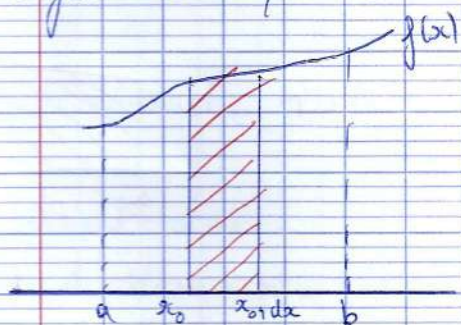
On continue on parlera de densité de probabilité

Definition: Soit 1 variable aléatoire continue de
 $\Omega \rightarrow [a, b] \in \mathbb{R}$
 $\omega \rightarrow X(\omega)$.

Soit $x_0 \in [a, b]$, $P(X = x_0) = 0$, la proba que X soit compris entre x_0 et $x_0 + dx$ s'écrit:

$$P(x_0 \leq X \leq x_0 + dx) = f(x_0) dx.$$

La fonction qui a $x_0 \rightarrow f(x_0)$ est La Densité de probabilité.



la surface hachurée correspond à $f(x_0) dx$.

$$f(x_0) dx = P(x_0 \leq X \leq x_0 + dx)$$

Propriétés: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

car $f(x) dx$ est proba

$f(x)$ a la dimension de $\frac{1}{\text{dimension de } dx}$

Remarque: Comme $P(X = x_0) = 0$ alors

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

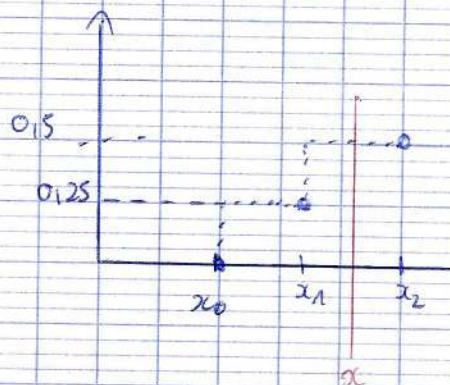
$$\text{Remarque 2: } P(a \leq X \leq b) = 1 = \int_a^b f(x) dx = 1 \text{ et éventuellement } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Condition de Normalisation.

2.2.2 La fonction de Répartition.

Definition: C'est la fonction $F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$
 $x \mapsto P(X \leq x)$.

- Un discret (très peu utilisé)

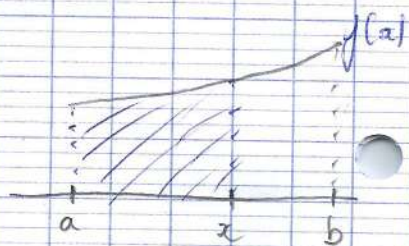


$$F(x) = P(X \leq x) \\ = P(X = x_0) + P(X = x_1)$$

- Un continu (bcp utilisé)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$\text{et } F'(x) = f(x)$$



La dérivée de la fonction de répartition, $F(x)$ donne la densité de probabilité, $f(x)$. et réciproquement, si on connaît $f(x)$ on peut déterminer $F(x)$

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^0 f(x) dx + \int_0^{x_2} f(x) dx \\ = F(x_2) - F(x_1).$$

$$\Rightarrow P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

- F est croissante de 0 à 1 car $P(x_1 < X < x_2) \geq 0 \Rightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$

In conclusion: La loi de proba d'une v.a. est donnée:

- dans le cas discret par la connaissance de $P(X=x)$
- dans le cas continu par la connaissance de la densité, $f(x)$, ou de la fonction de Répartition $F(x)$.

3) Les grandes lois de Probabilités

3.1) V. aléatoires discrètes

3.1.1) Loi Uniforme.

Si la variable aléatoire X prend des valeurs isolées $x_1, x_2, \dots, x_n$, la loi de probabilité de X est uniforme si $P(X=x_i)$ est indépendante de x

$$\sum_{i=1}^n P(X=x_i) = 1 \quad \text{d'où} \quad P(X=x_i) = \frac{1}{n}.$$

Exemple: Noir 1 dé

X : "le double du nombre tiré"

x_i	2	4	6	8	10	12
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tableau pour la loi de proba de X car en v.a.d.

on a une loi uniforme car $P(X=x_i) = \frac{1}{6}$. Il y a 6 valeurs

3.1.2) Loi binomiale. (Δ fis en discret)

Utilisation de cette loi.

- 1 expérience avec 2 résultats possible succès ou échec

- N réalisations successives et indépendantes

Soit X : "nombre de succès sur N réalisations"

alors $P(X = k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$ ou $1-p = q$
 p : proba du succès
 q : proba de l'échec

Notation : $B(N, p)$
 $\nearrow$ N : n° épreuve
 $\nwarrow$ p : proba du succès

Exemple loi Binomiale

Distribution des garçons dans les familles de 3 enfants en supposant une équiprobabilité.

Soit X suivant la loi Binomiale $B(n, p)$

Nous avons 3 épreuves identiques, chacune apportant le succès ou l'échec.

X , la v.a. discrète

$X = \{0, 1, 2, 3\}$ avec les distributions suivantes
 $B(3, p)$

n° épreuve	1	2	3	nb distribution.
$X=0$	e	e	e	$1 = C_3^0$
$X=1$	s	e	e A	$3 = C_3^1$
	e	s	e B	
	e	e	s C	
$X=2$	e	s	s	$3 = C_3^2$
	s	e	s	
	s	s	e	
$X=3$	s	s	s	$1 = C_3^3$

Cherchons par exemple $P(X=1)$

$\{X=1\} = \{A \cup B \cup C\}$ evts disjoints (incompatibles)

$$P(X=1) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$P(A) = ?$ $A = \{s \wedge e \wedge e\}$ evts indépendantes

$$P(A) = P(s) \times P(e) \times P(e) = P(s) \times P(e)^2$$

$\left. \begin{array}{l} p = \text{probab succès} \\ q = 1-p \text{ probab échec} \end{array} \right\}$

$$P(A) = p(1-p)^2$$

$$P(X=1) = P(A) + P(B) + P(C)$$

on remarque $P(A) = P(B) = P(C)$

$$P(X=1) = 3 p(1-p)^2 = C_3^1 p(1-p)^2$$

$\uparrow$ coef binomiale.

Généralisation :

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=0) = C_3^0 p^0 (1-p)^{3-0} = (1-p)^3$$

$$P(X=1) = C_3^1 p^1 (1-p)^{2} = 3p(1-p)^2$$

$$P(X=2) = C_3^2 p^2 (1-p)^1 = 3p^2(1-p)$$

$$P(X=3) = C_3^3 p^3 (1-p)^0 = p^3$$

Condition de normalisation.

$$\sum_{k=0}^n P(X=k) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

Verification Applicatⁿ Numérique

$$p = \frac{1}{2}$$

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\sum_{k=0}^3 P(X=k) = \frac{1+3+3+1}{8} = 1.$$

la C.N. est vérifiée

$$\sum_{k=0}^3 P(X=k) = 1$$

Exemple 2 - Soit 1 ligne de transmission qui a transmis N bits (0 ou 1).
Chaque bit est mal transmis avec la probabilité p et bien transmis avec la proba q ($q = 1-p$)

On suppose l'indépendance des erreurs de transmission

La v.a. est $X =$ "nb de bits mal transmis"

X est une v.a. discrète car X peut prendre les valeurs
 $X = \{0, 1, 2, \dots, N\}$

$$P(X=0) = q \cdot \dots \cdot q = q^N \text{ c-à-d aucune erreur de transmission}$$

$$P(X=1) = p \cdot q \cdot \dots \cdot q = p q^{N-1} \times C_N^1 \text{ (tenir compte de la pos^o)}$$

$$P(X=2) = p \cdot p \cdot \dots \cdot q = p^2 q^{N-2} \times C_N^2 //$$

$$P(X=k) = \sum_{k=0}^N C_N^k p^k q^{N-k}$$

Generalisation:

$$P(k) = \sum C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^N C_N^k p^k (1-p)^{N-k} = 1}$$

3.1.3 Loi de Poisson. (v.u.d)

C'est une extension de la loi binomiale pour $N \rightarrow +\infty$ et $p \rightarrow 0$.
(N grand) et (p petit)

$$\text{On peut montrer que } p(x=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$\text{avec } \lambda = Np$$

Démonstration à partir de la loi Binomiale:

$$\text{on a } P(X=k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k} \text{ avec } p = \frac{\lambda}{N}$$

$$P(X=k) = \frac{N!}{k! (N-k)!} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k}$$

Utilisation de la Formule de Stirling.

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

$$P(X=k) \approx \frac{N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}}{k! (N-k)^{N-k} e^{-N+k} \sqrt{2\pi(N-k)}} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k}$$

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{N}{N-k}\right)^N (N-k)^k \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k} \underbrace{\sqrt{\frac{N}{N-k}}}_{\text{qd } N \text{ grand } \rightarrow 1}$$

$$\bullet \left(\frac{N}{N-k}\right)^N = e^{N \ln\left(\frac{N}{N-k}\right)} = e^{N \ln\left(\frac{1}{1-\frac{k}{N}}\right)}$$

$$\approx e^{-N\left(-\frac{k}{N}\right)} \quad \text{appel.}$$

qd N grand $\rightarrow e^{-k}$

$$(N-k) \ln\left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

$$\bullet \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k} \approx e$$

$$= e^{N-k\left(-\frac{1}{N}\right)}$$

$$\approx e^{N-k\left(-\frac{1}{N}\right)} \rightarrow e^{-1}$$

appel: $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} \dots$

$$\text{si } |x| < 1$$

$$d. \ln\left(1 - \frac{k}{N}\right) \approx -\frac{k}{N} - \frac{k^2}{N^2} \dots$$

d'où $P(X=k) \approx \frac{e^{-k}}{k!} e^{k(N-k)} \left(\frac{1}{N}\right)^k e^{-1}$

$$P(X=k) \approx \frac{e^{-k} e^k}{k!} \underbrace{\left(\frac{N-k}{N}\right)^k}_{\rightarrow 1} e^{-1}$$

$$P(X=k) \approx \frac{1^k e^{-1}}{k!}$$

Retour exemple ligne de transmission qui a transmis 100 bits ($N=100$) avec une probabilité $p = \frac{1}{100}$ mal transmis

$$\text{ln binomiale: } P(X=k) = \binom{N}{k} \left(\frac{1}{100}\right)^k \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100-k}$$

ln loi de Poisson $P(X=k) = e^{-1} \frac{1^k}{k!}$ avec $X = Np = 100 \times \frac{1}{100}$

$$= 1$$

Comparaison

p	0	1	2
Binomiale $P(X=k)$	0,366	0,370	0,185

Poisson $P(X=k)$ 0,368 0,368 0,184

Loi de Poisson + adapté pour N grand et p petit
gués en temps de calcul et mémoire

Loi de Poisson la + utilisée

- nb d'appels téléphoniques reçus / minute dans un centre
- nb de fautes d'impression / page d'une thèse
- nb de particules émises par une source radioactive

3.2) Variables Aléatoires continues (v.a.c.)

3.2.1) Loi uniforme (en v.a.c.).

a) d'abord en Uniforme

Elle est cste, $f(x) = c$ sur un intervalle $[a, b]$
Utilisation de la condition de Normalisation

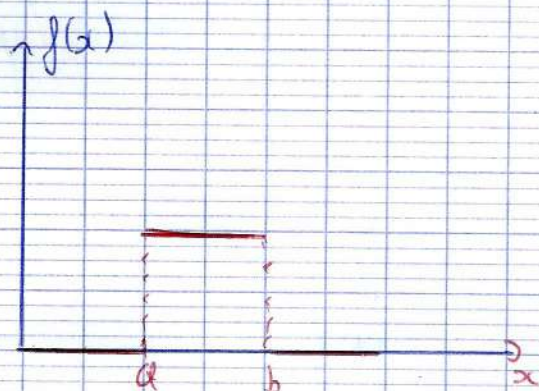
$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

$$\int_a^b c dx \Rightarrow c \int_a^b dx \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{b-a}$$

dérive d'une loi uniforme.

representation



Remarque: a et b finis

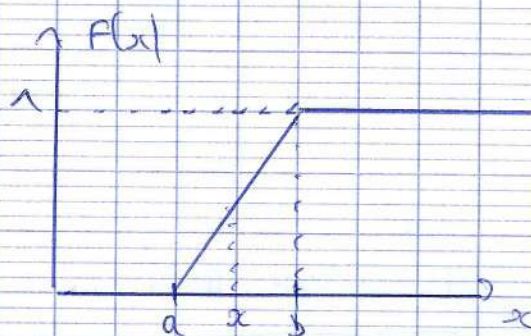
Pas la loi uniforme sur $\mathbb{R}$ dans la totalité.

b) Fonction de Répartition

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow \text{Uniforme } f(t) = c \Rightarrow P(X \leq x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a}$$

$$\Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}$$

representation



$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{\text{longueur } [a, x]}{\text{longueur } [a, b]}$$

loi uniforme

$$x < a : F(x) = 0$$

$$a \leq x \leq b : F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$x > b$$

$$F(x) = 1$$