

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Théorème de multiplication

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 | A_1 \cap A_2) P(A_2 | A_1) P(A_1)$$

Permutation:  $N = m!$

avec répétition:

$$N = \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma!}$$

ELECTRICITE

$$N = 3! 2! 2! 2!$$

$P$  parmi  $m$  objets

$$A_m^P = \frac{m!}{(m-P)!}$$

→ arrangements

$$C_m^P = \frac{A_m^P}{P!}$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)! 2!}$$

→ combinaisons

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

## Variables aléatoires.

La loi de probabilité de la V.a.  $X$  est l'ensemble des probas  $P(X=x_i)$   
 $\nearrow$  ou  $P(\{\omega / X(\omega)=x_i\})$  et qui satisfait  $P(X=x_i) \leq 1$   
 discret  $\rightarrow P(X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3) = \dots$

continu  $\rightarrow$  soit  $x_0$  un val de  $[a, b]$ , la proba pour que  $X$  soit  
 compris entre  $x_0$  et  $x_0+dx$  s'écrit  $P(x_0 \leq X \leq x_0+dx) = f(x_0)dx$   
 avec  $f(x)$  la densité de probabilité de la V.a.  $X$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$$\rightarrow P(a \leq X \leq b) = 1 \Rightarrow \text{condition de normalisation}$$

## Fonction de répartition:

$$P(X \leq x) = F(x)$$

discret  $\rightarrow$  rien

continu  $\rightarrow$   $F(x_0) = P(X \leq x_0) = \int_a^{x_0} f(x) dx$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$\Rightarrow$  Loi de proba d'une v.a. donnée par:

- $P(X=x_i)$  pour discret
- $f(x)$  ou  $F(X)$  pour continu

## Lois de Probab les plus connues

### V. a. discrètes.

$$P(X=x_i) = \frac{1}{m}$$

### Loi binomiale

- expérience aux 2 résultats possibles
- $N$  réalisations successives.
- indépendantes

$$P(X=x) = C_N^x q^N p^{N-x}$$

### Loi de Poisson.

↳ Loi binomiale pour  $p$  petit

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

### V. a. continues.

#### V. a. uniforme.

$$\bullet \text{ Loi uniforme: } f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$\text{fonction de répartition: } P(X \leq x) = \int_0^x f(x) dx$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} [t]_a^x = \boxed{\frac{x-a}{b-a}}$$

$$\bullet \text{ Loi expoi: } f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\boxed{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$$

fonction de répartition:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left[ -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^x \\ = 1 - e^{-\lambda x}$$

Fonction d'une variable aléatoire.

$$\omega \rightarrow h(x(\omega))$$

discret:  $h(x) = y$

$$P(Y = y_i) = P(X = x_i)$$

continue:  $h(x)$  bijective si monotone décroissante.

$$\text{si bijectif: } P(x \leq X \leq x+dx) = P(y \leq Y \leq y+dy)$$

$$f(x)dx = g(y)dy$$

$$\Rightarrow g(y) = f(x) \times \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \rightarrow h'(x)$$

$$f(x)|dx| = g(y)|dy|$$

Esperance mathématique:

discret:  $E(X) = \sum x_i \times P(X=x_i)$

$$E(X) = np$$

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

loi poisson:  $E(X) = \lambda$  avec  $\lambda = np$

continue:

Loi uniforme:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx \\ = \frac{a+b}{2}$$

Loi expo :  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$   $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

intégration par partie.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Propriété de l'espérance mathématique :

$$E[h(x)] = \sum_x h(x) P(X=x)$$

Variance et moment

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

discret :

binomiale :  $\text{Var}(X) = Np(1-p)$

poisson :  $\text{Var}(X) = E(X) = \lambda$