

DEVOIR N°1 DE PROBABILITE du 14 novembre 2006

Recommandations pour la résolution des exercices :

- Indiquer votre nom et votre groupe de TD sur toutes les copies
- Pas de raisonnement avec les mains !
- Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions irréductibles
- Les résultats numériques sans justification ne seront pas pris en compte !

Question de cours :

Rappeler la formule des probabilités totales (sans oublier les hypothèses pour son utilisation) et en déduire la formule de Bayes.

Exercice 1 :

Un guichet automatique d'une banque nécessite l'utilisation d'une carte magnétique avec un code secret à quatre chiffres (0000 à 9999 inclus). La procédure pour retirer de l'argent est la suivante : le client se présente au guichet, introduit sa carte puis compose son code confidentiel. Si le numéro composé est exact, le client peut retirer de l'argent. Dans le cas contraire, la carte est rejetée. A l'issue de trois essais infructueux, le guichet conserve la carte. On suppose, en cas d'erreur, que le client ne recommence pas deux fois le numéro.

1. David se présente au guichet alors qu'il ne se souvient plus si son numéro est 5559, 5595, 5955 ou 9555 (l'un de ces numéros étant le bon). Quelle est la probabilité pour que David arrive à retirer de l'argent ?
2. Jacques se présente au guichet alors qu'il ne se souvient plus du tout de son code. Quelle est la probabilité pour qu'il réussisse à retirer de l'argent ?
3. On estime à $1/5$ la proportion de personnes susceptibles d'utiliser frauduleusement une carte trouvée. Quelle est la probabilité pour que Marie, qui a perdu sa carte, voit son compte débité contre son gré ?

Exercice 2 :

Dix livres sont placés au hasard sur une étagère. Quelle est la probabilité pour que trois livres donnés soient l'un à côté de l'autre ?

Nota : $\ln(0.05) = -3$ $\ln(2/3) = -0.4$

Exercice 3 :

1. Une urne contient les douze "figures" d'un jeu de 52 cartes : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. On tire simultanément et au hasard cinq cartes de l'urne.
 - a. Calculer la probabilité d'avoir exactement deux rois.
 - b. Calculer la probabilité d'avoir au moins un roi.
 - c. Donner la loi de probabilité (sous forme d'un tableau) du nombre de rois obtenus.
2. En utilisant la même urne avec les mêmes douze cartes, on effectue maintenant 5 tirages successifs d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'urne.
 - b. Calculer la probabilité d'obtenir cinq fois un roi.
 - c. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux rois.
 - d. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un roi.
3. Dans la même urne contenant toujours les mêmes douze cartes, on effectue maintenant n fois le tirage d'une carte avec remise. Combien faut-il de tirage (au minimum) pour être sûr à 95% d'obtenir un seul roi ?

Exercice 4 :

Des individus $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ se transmettent une information dans cet ordre (ordre des indices). Chaque individu transmet l'information de manière fidèle avec une probabilité de 0,8 ou la change en son contraire avec une probabilité de 0,2.

On note A_n , l'évènement le $n^{\text{ème}}$ individu reçoit l'information non déformée, et $p_n = P(A_n)$.

On suppose de plus que le premier individu possède l'information non déformée ($p_1 = 1$).

1. Calculer p_2 et p_3 .
2. Montrer que pour tout entier non nul n , on a $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,2$.
3. Exprimer p_n en fonction de n . (Indication : on introduira l'équation $\omega = 0,6\omega + 0,2$ et on considérera la suite $U_n = p_n - \omega$)
4. En déduire la probabilité que le $10^{\text{ème}}$ individu reçoive l'information non déformée.
5. Étudier la limite de p_n quand n tend vers l'infini.