

TAI PROBA

La Fortune d'un Joueur

Partie 1

$$a) T = \min\{n \in \mathbb{N} | X_n = 10 + k\}$$

Montrer que $(\forall a \in [0, 10 + k])$, $p(T \leq n + 1 | X_1 = a) = p(T \leq n | X_0 = a)$

$$p(T \leq n | X_0 = a) = P(T = 0) + P(T = 1) + \dots + P(T = n)$$

$$p(T \leq n + 1 | X_1 = a) = P(T = 0) + P(T = 1) + \dots + P(T = n + 1)$$

Or, $P(T=0) = 0$. Donc :

$$p(T \leq n + 1 | X_1 = a) = P(T = 1) + \dots + P(T = n + 1)$$

Comme $P(T=1) = P(T = 2) = P(T = n) \dots$ Alors les deux suites ont le même nombre de termes qui sont tous équivalents, donc $p(T \leq n + 1 | X_1 = a) = p(T \leq n | X_0 = a)$

Le joueur a $2/5$ chances de gagner 1 et $3/5$ chances de perdre 1. Donc,

$$\begin{aligned} (\forall a \in [1, 9 + k]), p(T \leq n + 1 | X_0 = a) &= \frac{2}{5} p(T \leq n | X_0 = a) \\ &= a + 1) + \frac{3}{5} p(T \leq n | X_0 = a - 1) \end{aligned}$$

$$b) p_a = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$$

$$f_n(a) = p(T \leq n | X_0 = a)$$

Or, si au début, $a = 0$, le joueur ne peut pas jouer donc $p_0 = 0$.

Et, si au début, $a = 10 + k$, le joueur n'a pas d'intérêt à jouer donc $p_{10+k} = 1$

$$\begin{aligned} p_{a+1} &= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{a+1} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10+k} - 1} \\ p_{a-1} &= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{a-1} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10+k} - 1} \\ p_a &= \frac{2}{5} p_{a+1} + \frac{3}{5} p_{a-1} \\ &= \frac{2}{5} \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{a+1} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10+k} - 1} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{a-1} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10+k} - 1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \left(\frac{2 * \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{a+1} - 1 \right) + 3 \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{a-1} - 1 \right)}{\left(\frac{3}{2} \right)^{10+k} - 1} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{3 * \left(\left(\frac{3}{2} \right)^a - 1 \right) + 2 * \left(\left(\frac{3}{2} \right)^a - 1 \right)}{\left(\frac{3}{2} \right)^{10+k} - 1} \right) \\
&= \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^a - 1}{\left(\frac{3}{2} \right)^{10+k} - 1} = p_a
\end{aligned}$$

c) $p_{10} = \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{10} - 1}{\left(\frac{3}{2} \right)^{10+k} - 1}$

d) On veut la plus grande valeur de k pour laquelle $p_{10} > 0,5$

$$\begin{aligned}
p_{10} &> \frac{1}{2} \\
\iff \left(\frac{3}{2} \right)^{10} - 1 &> \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{10+k} - 1}{2} \\
\iff \left(\frac{3}{2} \right)^{10} &> \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{10+k}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff 2 * \left(\frac{3}{2} \right)^{10} &> \left(\frac{3}{2} \right)^{10} * \left(\frac{3}{2} \right)^k \\
\iff 2 &> \left(\frac{3}{2} \right)^k \\
\iff \frac{\log(2)}{\log\left(\frac{3}{2}\right)} &> k \\
\iff 1,7095 &> k
\end{aligned}$$

e) $E(X_{n+1} - 10) = E(X_{n+1} - X_n + X_n - 10)$

$$E(X_{n+1} - 10) = E(X_n - 10) + E(X_{n+1} - X_n)$$

Or, $E(X_{n+1} - X_n)$ correspond à la probabilité que le joueur au tour suivant est une fortune entre 1 et 10. Donc à $-\frac{1}{5}p(X_n \in [1,10])$.

Donc $E(X_{n+1} - 10) = E(X_n - 10) - \frac{1}{5}p(X_n \in [1,10])$

$$\lim(p(X_n \in [1,10])) = 5 * (E(X_n - 10) - E(X_{n+1} - 10))$$

$$\lim(p(X_n \in [1,10])) = 5 * (v_n - v_{n+1})$$

$$\lim(p(X_n \in [1,10])) = 5 * (-10 + 10) = 0$$

$$\lim(p(X_n = 0) + p(X_n = 11)) = 1$$

C'est putain de logique parce qu'à la fin, soit il gagne soit il perd.

$$p(X_n = 11) = 1 - p(X_n = 0)$$

$$p(X_n = 11) = 1 - p(T \geq N)$$

$$p(X_n = 11) = p(T \leq N)$$