

Rapport de TAI de Probabilités

Etude commerciale de probabilités dans un système de files d'attente



ABBAS Thomas
CHUNG Fabien

*KLOTZ Raphaël**L2 - Groupe A - Promo 2012*

SOMMAIRE

Introduction	5
I· Définition d'une fonction de probabilité	7
1. Cours Théorique	7
a. Indépendants et Disjoints.....	7
b. Complément.....	7
2. Exercice d'application.....	7
a. $P(\text{qu'il y ait 1 client})$	9
b. $P(\text{qu'il n'y ait personne})$	9
c. $P(\text{qu'il y ait au moins 2 personnes})$	9
3. Application numérique.....	9
II· Loi Binomiale.....	11
1. Théorème de Bernoulli	11
2. Loi Binomiale	11
3. Exercice d'application.....	12
III· Arrangements	13
1. Théorie	13
2. Application numérique.....	13
IV· Espérance, Variance et Ecart type	14
1. Théorie.....	14
a. Loi de probabilité.....	14
b. Espérance mathématique.....	14
c. Variance.....	14
d. Ecart type.....	14
2. Application.....	14
V· Approfondissement	16
Conclusion	18
1. Les professionnels.....	18
2. Les élèves	18

Introduction

Monsieur le responsable de recrutement, vous avez sollicité ProbAssociés dans un appel d'offre et nous vous en remercions. Votre entreprise demande une -nouvelle- gestion de ses files d'attente? Vous ne tirez pas entière satisfaction du rendement de votre service d'attente? Votre choix s'est donc porté sur des professionnels d'étude probabilitaires de renom!

Après avoir longuement observé les statistiques de votre entreprise, nous avons établi une courte étude probabilitaire sur ces processus aléatoires desquels nous tenons notre professionnalisme : la file d'attente client.

Dans ce dossier concernant nos études, vous trouverez non seulement les résultats mais aussi un bref résumé de chacune de nos démarches ainsi qu'un rappel (ne demandant aucune compétence en la matière) des notions de probabilités auxquelles nous avons fait appel lors de notre réflexion.

Analyse, pédagogie et professionnalisme, tels sont les maîtres mots de nos réponses à appel d'offre. Nous espérons par avance répondre à vos exigences et sommes d'ores et déjà désireux de mettre nos capacités au service de votre société.

Cordialement,

ProbAssociés

"Jamais un coup de dés n'abolira le hasard"
Stéphane Mallarmé

Sources :

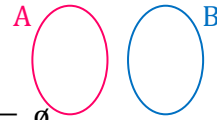
- ✓ www.baudrandmaths.free.fr
- ✓ www.rfv.insa-lyon.fr
- ✓ www.wims.unice.fr
- ✓ www.fr.wikipedia.org
- ✓ www.reymarlioz.free.fr
- ✓ Cours d'Hubert Perrot, enseignant de Probabilités à l'EFREI, Ecole d'ingénieur informatique

I- Définition d'une fonction de probabilité

1. Cours Théorique

a. Indépendants et Disjoints

- Deux événements sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$



On peut alors écrire la probabilité : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ et sous la forme $\frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}$.

- Un événement B est dit indépendant d'un événement A si la probabilité que B se produise ne dépend pas du fait que A se produise ou non.

b. Complément

Le complémentaire $\bar{A}$ d'une probabilité A figurant dans un ensemble E est constitué de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$$\bar{A} \cap A = \emptyset \quad \text{et} \quad \bar{A} \cup A = E$$

Vérification : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$P(\bar{A} \cap A) = P(\emptyset) = 0$$

Or $\bar{A}$ et A sont disjoints donc :

$$P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

2. Exercice d'application

En considérant le schéma fourni en annexe...

Cherchons la probabilité que sur N clients pour le SAV, deux veuillent le service Téléphonie.

Pour calculer cette probabilité A , il est généralement plus facile d'effectuer un calcul à partir du complémentaire. Celui-ci est défini par :

$$P(\text{qu'il y ait au moins 2 personnes}) = 1 - [P(\text{qu'il y ait 1 client}) + P(\text{qu'il n'y ait personne})]$$

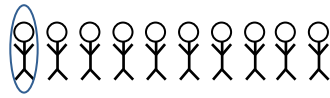
- ✓ Définissons d'un événement élémentaire

A_i : La i ème personne patiente afin d'être en relation avec la Téléphonie

- ✓ Sont-ils indépendants et disjoints?

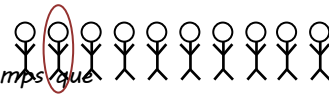
Ils sont *indépendants* puisque le choix de la personne n ne dépend pas de celui de $n-1$.

Ils sont, de plus, *disjoints* car la probabilité que la personne n veuille être en relation avec le SAV de la Téléphonie n'est pas conciliable avec celle d'une autre :



$p(A_1)$

ne peut pas arriver en même temps que



$p(A_2)$

donc *disjoints*

a. ***P(qu'il y ait 1 client)***

Trouvons la probabilité qu'il y ait une personne venant pour la téléphonie

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n) \cup P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n) \cup \dots \cup P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n)$$

Or, la place à laquelle se trouve le client n'a pas d'importance et les événements sont disjoints :

$$P(X = 1) = \frac{\text{nombre de cas possibles}}{\text{nombre de cas favorables}} = \frac{(P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n) * n)}{n * 5}$$

Puisqu'ils sont, de plus, indépendants :

$$P(X = 1) = \frac{P(A_1) * P(\bar{A}_2) * P(\bar{A}_3) * \dots * P(\bar{A}_n)}{5}$$

La probabilité de patienter pour autre chose que la Téléphonie est la même pour chaque personne donc :

$$P(X = 1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = \dots = P(\bar{A}_n)$$

On remplace...

$$P(X = 1) = \frac{P(A_1) * P(\bar{A}_2) * (n - 1)}{5}$$

b. ***P(qu'il n'y ait personne)***

$$P(X = 0) = \frac{P(\bar{A}_1) \cap P(\bar{A}_2) \cap P(\bar{A}_3) \cap \dots \cap P(\bar{A}_n)}{n * 5}$$

$$P(X = 0) = \frac{P(\bar{A}_1) * P(\bar{A}_2) * P(\bar{A}_3) * \dots * P(\bar{A}_n)}{n * 5}$$

$$P(X = 0) = \frac{P(\bar{A}_1)}{5}$$

c. ***P(qu'il y ait au moins 2 personnes)***

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 0)]$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \left(\frac{P(A_1) * P(\bar{A}_2) * (n - 1) + P(\bar{A}_1)}{5} \right)$$

3. Application numérique

On envisage la probabilité de trouver au moins 2 personnes pour la Téléphonie (parmi les 5 catégories du SAV) dans une file d'attente de 30 personnes :

$$P(X \geq 2) = 1 - \left(\frac{P(A_1) * P(\bar{A}_2) * (n - 1) + P(\bar{A}_1)}{5} \right)$$

$$P(A_1) = \frac{1}{20}$$

$$P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = \frac{19}{20}$$

$$n = 30$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \left(\frac{\frac{1}{20} * \frac{19}{20} * 29 + \frac{19}{20}}{5} \right) = 1 - \frac{\frac{551}{400} + \frac{380}{400}}{5} = 1 - \frac{931}{2000} = \boxed{0,5345}$$

*Ainsi, sur une file de 30 personnes pour le SAV, il y a environ **53%** de chances pour qu'au moins deux d'entre-elles veuille le service Téléphonie.*

II. Loi Binomiale

1. Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une expérience aléatoire de paramètre p et qui a deux issues possibles : le succès ou l'échec.

Exemple : Dans une classe de 25 élèves, avec 10 garçons et 15 filles, on choisit au hasard un élève. On considère le succès comme avoir un garçon. Ainsi $p = \frac{10}{25} = \frac{4 \cdot 10}{100} = 0,4$: une probabilité de 0,4 soit de 40%.

2. Loi Binomiale

La loi binomiale est en réalité l'expérience de Bernoulli (deux cas possibles) répétée n fois **successivement**. De plus il faut qu'elles soient **indépendantes** : c'est-à-dire qu'il ne faut pas que l'expérience précédente ait une influence sur la suivante.

Contre exemple : On désire suivre une recette de cuisine. La recette n'étant pas simple à réaliser, on a une probabilité de succès (p) faible (exemple : $p = 0,3$). Mais en la réalisant plusieurs fois (successivement), la probabilité d'y parvenir augmente, donc p augmente! Les conditions de résolution par la loi Binomiale ne sont pas respectées.

A la fin de l'expérience, on compte le nombre de succès (p) ou d'échec ($q = 1 - p$) que l'on nommera comme une variable aléatoire X .

$$C_n^x p^x q^{n-x}$$

$$\text{avec } C_n^x = \frac{n!}{(n-x)! x!}$$

Par ailleurs, lorsque le nombre d'expériences est **élevé** et que la probabilité de succès (p) est **faible**, cette loi est proche de la **loi de Poisson** s'exprimant ainsi :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^x}{x!}$$

$$\text{avec } \lambda = n \cdot p$$

3. Exercice d'application

Admettons que **1%** des marchandises reviennent en SAV. On a vendu **50** articles.
Combien a-t-on de chances que **trois** articles défectueux reviennent en magasin ?

✓ Utiliser Loi de Binomiale pour $x = 3$ articles défectueux

Deux cas sont possibles (réussite, échec), indépendants (chaque article ne dépend pas d'un autre) et successifs (articles vendus avec file d'attente).

$$N = 50 \quad p = \frac{1}{100} \text{ succès} \quad q = \frac{99}{100} \text{ échecs} \quad \text{sachant que } C_{50}^3 = \frac{50!}{(50-3)! \cdot 3!} = 19600$$

$$P(X = 3) = C_{50}^3 p^3 q^{50-3} = \boxed{0,01222}$$

Nous avons donc environ **0,012 %** de chances qu'il y ai 3 articles sur les 50 vendus qui reviennent en SAV.

✓ Puis vérifier avec la Loi de Poisson ...

$$\text{sachant que } \lambda = N * p = 50 * \frac{1}{100} =$$

$$\boxed{0,5}$$

$$P(X = 3) = \frac{e^{-0,5} * 0,5^3}{3!} = \boxed{0,01263}$$

Ainsi nous remarquons que le résultat est similaire entre la loi de Poisson et la loi Binomiale au millième près.

III. Arrangements

1. Théorie

On considère soient n objets. Un arrangement de p objets est obtenu en tirant p objets parmi les n objets et en les rangeant. Le nombre d'arrangements pour ce type d'énoncé vaut :

$$N = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * (n - p + 1)$$

On note cette grandeur A_n^p .

2. Application numérique

On considère que, dans le service étudié, on dispose de $n=500$ produits.

Dans notre file d'attente composée de $p=15$ personnes, on cherche à savoir quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes commanderont le même produit.

✓ L'événement élémentaire et son complément

On note un événement élémentaire A décrit par :

A = "au moins 2 personnes de la file d'attente commanderont le même produit"

Ainsi que son complément : $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

✓ Méthode puis Calcul

On notera que notre expression est sous la forme " $1 - \left(\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} \right)$ " car on étudie un système équiprobable : chaque personne a la même probabilité de commander un même produit.

$$P(A) = 1 - \frac{A_{500}^p}{500^p} = 1 - \frac{500 * 499 * 498 * \dots * (500 - 15 + 1)}{500^{15}} = \boxed{0,19}$$

IV. Espérance, Variance et Ecart type

1. Théorie

a. Loi de probabilité

Une loi de probabilité décrit les façons typiques dont se répartissent les fréquences d'apparition des résultats que l'on trouve suite à l'observation d'un phénomène aléatoire.

On y associe une variable aléatoire X pour décrire la répartition des valeurs qu'elle peut prendre au cours du phénomène.

b. Espérance mathématique

L'espérance mathématique est la moyenne pondérée, par la probabilité, de toutes les valeurs que prennent les événements de l'espace étudié.

$$E(X) = \sum x P(X = x)$$

c. Variance

La variance est la traduction chiffrée de la dispersion de la distribution d'une variable aléatoire autour de sa valeur moyenne. Etant un carré, la dimension de la variance n'est pas la même que celle de la moyenne. C'est pourquoi on utilise le plus souvent l'écart type (voir ci-après).

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

d. Ecart type

L'écart type est une quantité réelle positive, utilisée pour caractériser la répartition d'une variable aléatoire réelle autour de sa moyenne. On l'obtient, comme dit précédemment, en prenant la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}$$

2. Application

On admet qu'un débutant a la probabilité $p = \frac{1}{100}$ d'effectuer une erreur lors de la prise d'une commande au guichet. On étudie un échantillon de **500** commandes.

✓ Loi de probabilité

Les prises de commande sont des événements successifs et indépendants. Il y a deux cas possibles : soit la commande est correcte, soit elle ne l'est pas. On peut donc utiliser une loi binomiale de cette façon :

$$P(X = x) = C_{500}^x \left(\frac{1}{100}\right)^x \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{500-x}$$

✓ *Espérance*

$$E(X) = Np = 500 * \frac{1}{100} = \boxed{5}$$

✓ *Variance*

$$V(X) = Np(1 - p) = 500 * \frac{1}{100} * \left(1 - \frac{1}{100}\right) = 5 * \frac{99}{100} = \boxed{4,95}$$

✓ *Ecart type*

$$\sigma x = \sqrt{Np(1 - p)} = \sqrt{4,95} = \boxed{2,224}$$

V. Approfondissement

La théorie des files d'attente est une technique qui permet de modéliser un système admettant un phénomène d'attente, de calculer ses performances et de les déterminer.

En fonction du modèle de la file d'attente, il existe des théories plus ou moins complexes telles que les files d'attentes avec arrivées exponentielles et durées de service exponentielles (MMC).

Nous pouvons définir le **taux de clients** qui arrivent et le **taux de service** par unité de temps (respectivement λ et μ).

Le nombre moyen dans un système stable d'après la Loi de Little est $\lambda * \tau$ (avec τ représentant le temps moyen passé dans le système).

La notation de Kendall permet de décrire toutes les files d'attentes avec 6 symboles :

- **a** La loi de probabilité des instants d'arrivées (avec des différents symboles en fonction de la loi de probabilité utilisée)
- **s** La loi de probabilité de la durée du service.
- **C** Le nombre de guichets
- **K** La capacité totale du système
- **m** La population totale de clients
- **Z** Le discipline de service (premier arrivé, premier servi ou alors dernier arrivé, premier servi)

Ainsi le modèle de file d'attente $M/M/1$ est le modèle le plus aisé à manipuler puisque nous connaissons les moyens suivant pour la modéliser :

- $P_0 = 1 - A$ Probabilité P_0 d'avoir un système vide
- $P_a = A$ Probabilité P_a d'attendre
- $\langle N_s \rangle = A$ Le nombre N_s moyen de clients au guichet
- $\langle N \rangle = \frac{A}{1-A}$ Le nombre N moyen de clients dans le système

- $\langle N_a \rangle = \frac{A^2}{1-A}$ *Le nombre N_a moyen de clients en attente*
- $\tau = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-A}$ *Temps τ moyen de séjour au sein du système*
- $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ *Condition d'atteinte de l'équilibre : pas d'accumulation de clients*

Conclusion

1. Les professionnels

Ainsi se termine le résumé de notre étude. Parmi les dizaines de théories et calculs concernant les files d'attente, seulement certaines vous ont été exposées.

Nous sommes fières d'avoir pu mettre nos compétences en pratique avec l'environnement de votre entreprise ainsi que ses données. Cette étude n'est bien évidemment pas exhaustive. La totalité de nos compétences sont à votre disposition.

Nous vous invitons, dans ces conditions, à nous faire parvenir vos commentaires -bons ou mauvais- sur notre étude et espérons avoir détaillé les points nécessaires pour vous convaincre de notre future collaboration.

Cordialement,

ProbAssociés

"Le calcul des probabilités, appliqué à la mortalité humaine a donné naissance à une science nouvelle: celle des assurances."
Emile de Girardin

2. Les élèves

Les études d'entreprise sont l'essence de notre métier. En tant que futur ingénieur, il fût intéressant de combiner le monde mathématique des probabilités aux réflexions pratiques d'une gestion de clients.

La file d'attente n'est pas qu'un groupe de personnes, c'est une réelle étude théorique. Aux quelques paramètres que nous vous avons exposé dans le paragraphe "Approfondissement", nous pourrions ajouter des dizaines d'autres plus compliqués les uns que les autres !

Les Travaux Dirigés et les cours magistraux prennent une toute autre forme lorsque l'on prend le temps d'y trouver des applications dans le fonctionnement d'une société.

Nous avons ainsi pu découvrir non seulement un vaste monde qu'est celui des théories sur les files d'attente ; mais aussi une toute autre facette des probabilités.

Bien que cette matière soit une des plus concrètes, nous avons été surpris d'être tant inspiré à l'appliquer "sur le terrain" et espérons l'être une nouvelle fois dans le futur.

Annexe

