Rapport de TAI de Probabilités

Etude commerciale de probabilités dans un système de files d'attente

ABBAS Thomas
CHUNG Fabien

KLOTZ Raphaël

L2 - Groupe A - Promo 2012

SOMMAIRE

Introduction 5

I. *Définition d'une fonction de probabilité* 7

1. Cours Théorique 7
   a. *Indépendants et Disjoints* 7
   b. *Complément* 7
2. Exercice d'application 7
   a. $P(qu'il\ y\ ait\ 1\ client)$ 9
   b. $P(qu'il\ n'y\ ait\ personne)$ 9
   c. $P(qu'il\ y\ ait\ au\ moins\ 2\ personnes)$ 9
3. Application numérique 9

II. *Loi Binomiale* 11

1. Théorème de Bernoulli 11
2. Loi Binomiale 11
3. Exercice d'application 12

III. *Arrangements* 13

1. Théorie 13
2. Application numérique 13

IV. *Espérance, Variance et Ecart type* 14

1. Théorie 14
   a. *Loi de probabilité* 14
   b. *Espérance mathématique* 14
   c. *Variance* 14
   d. *Ecart type* 14
2. Application 14

V. *Approfondissement* 16

Conclusion 18

1. Les professionnels 18
2. Les élèves 18

Introduction

Monsieur le responsable de recrutement, vous avez sollicité *ProbAssociés* dans un appel d'offre et nous vous en remercions. Votre entreprise demande une -nouvelle- gestion de ses files d'attente? Vous ne tirez pas entière satisfaction du rendement de votre service d'attente? Votre choix s'est donc porté sur des professionnels d'étude probabilitaires de renom!

Après avoir longuement observé les statistiques de votre entreprise, nous avons établi une courte étude probabilitaire sur ces processus aléatoires desquels nous tenons notre professionnalisme : la file d'attente client.

Dans ce dossier concernant nos études, vous trouverez non seulement les résultats mais aussi un bref résumé de chacune de nos démarches ainsi qu'un rappel (ne demandant aucune compétence en la matière) des notions de probabilités auxquelles nous avons fait appel lors de notre réflexion.

Analyse, pédagogie et professionnalisme, tels sont les maîtres mots de nos réponses à appel d'offre. Nous espérons par avance répondre à vos exigences et sommes d'ores et déjà désireux de mettre nos capacités au service de votre société.

Cordialement,

ProbAssociés

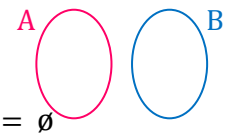
"Jamais un coup de dés n'abolira le hasard"
Stéphane Mallarmé

Sources :

- ✓ www.baudrandmaths.free.fr
- ✓ www.rfv.insa-lyon.fr
- ✓ www.wims.unice.fr
- ✓ www.fr.wikipedia.org
- ✓ www.reymarlioz.free.fr
- ✓ Cours d'Hubert Perrot, enseignant de Probabilités à l'EFREI, Ecole d'ingénieur informatique

I. Définition d'une fonction de probabilité

1. Cours Théorique



a. *Indépendants et Disjoints*

- *Deux événements sont dis disjoins si et seulement si* $A \cap B = \emptyset$

On peut alors écrire la probabilité : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *et sous la forme* $\frac{cas\ favorables}{cas\ possibles}$.

- *Un événement B est dit indépendant d'un événement A si la probabilité que B se produise ne dépend pas du fait que A se produise ou non.*

b. *Complément*

Le complémentaire $\bar{A}$ *d'une probabilité* A *figurant dans un ensemble* E *est constitué de tous les éléments de* E *qui n'appartiennent pas à* A *:*

$$\bar{A} \cap A = E \qquad \text{et} \qquad \bar{A} \cup A = E$$

Vérification : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P(\bar{A} \cap A) = P(E) = 1$ *Or* $\bar{A}$ *et* A *sont disjoints donc :*

$P(\bar{A} \cap A) = P(\bar{A}) + P(A) = 1$

=> $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

2. Exercice d'application

En considérant le ***schéma*** *fourni en annexe…*

Cherchons la probabilité que sur ***N*** *clients pour le SAV,* ***deux*** *veuillent le service Téléphonie.*

Pour calculer cette probabilité A, il est généralement plus facile d'effectuer un calcul à partir du <u>*complémentaire*</u>*. Celui-ci est défini par :*

$P(qu'il\ y\ ait\ au\ moins\ 2\ personnes) = 1 - [P(qu'il\ y\ ait\ 1\ client) + P(qu'il\ n'y\ ait\ personne)]$

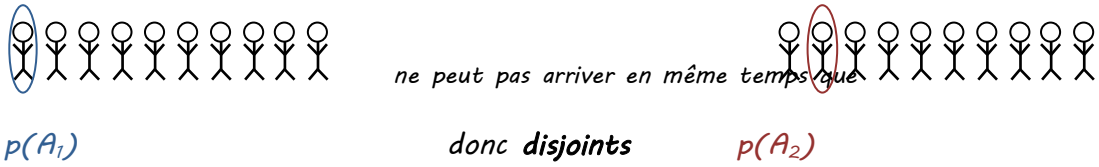
- ✓ *Définissons d'un évènement élémentaire*

A_i *: La ième personne patiente afin d'être en relation avec la Téléphonie*

- ✓ *Sont-ils indépendants et disjoints?*

*Ils sont **indépendants** puisque le choix de la personne **n** ne dépend pas de celui de **n-1**.*

*Ils sont, de plus, disjoints car la probabilité que la personne **n** veuille être en relation avec le SAV de la Téléphonie n'est pas conciliable avec celle d'une autre :*



a. ***P(qu'il y ait 1 client)***

Trouvons la probabilité qu'il y ait <u>une</u> personne venant pour la téléphonie

$$P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{A_n}) \cup P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{A_n}) \cup \ldots \cup P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap A_n)$$

Or, la place à laquelle se trouve le client n'a pas d'importance et les événements sont disjoints :

$$P(X=1) = \frac{nombre\ de\ cas\ possibles}{nombre\ de\ cas\ favorables} = \frac{(P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{A_n}) * \cancel{n})}{\cancel{n} * 5}$$

Puisqu'ils sont, de plus, indépendants :

$$P(X=1) = \frac{P(A_1) * P(\overline{A_2}) * P(\overline{A_3}) * \ldots * P(\overline{A_n})}{5}$$

La probabilité de patienter pour autre chose que la Téléphonie est la même pour chaque personne donc :

$$P(X=1) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3}) = \cdots = P(\overline{A_n})$$

On remplace…

$$\boxed{P(X=1) = \frac{P(A_1) * P(\overline{A_2}) * (n-1)}{5}}$$

b. ***P(qu'il n'y ait personne)***

$$P(X=0) = \frac{P(\overline{A_1}) \cap P(\overline{A_2}) \cap P(\overline{A_3}) \cap \ldots \cap P(\overline{A_n})}{n * 5}$$

$$P(X=0) = \frac{P(\overline{A_1}) * P(\overline{A_{\cancel{2}}}) * P(\overline{A_{\cancel{3}}}) * \ldots * P(\overline{A_{\cancel{n}}})}{\cancel{n} * 5}$$

$$\boxed{P(X=0) = \frac{P(\overline{A_1})}{5}}$$

c. ***P(qu'il y ait au moins 2 personnes)***

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X=1) + P(X=0)]$$

$$\boxed{P(X \geq 2) = 1 - \left(\frac{P(A_1) * P(\overline{A_2}) * (n-1) + P(\overline{A_1})}{5}\right)}$$

3. Application numérique

On envisage la probabilité de trouver au moins 2 personnes pour la Téléphonie (parmi les 5 catégories du SAV) dans une file d'attente de 30 personnes :

$$P(X \geq 2) = 1 - \left(\frac{P(A_1) * P(\overline{A_2}) * (n-1) + P(\overline{A_1})}{5}\right)$$

$P(A_1) = \frac{1}{20}$ $\qquad$ $P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = \frac{19}{20}$ $\qquad$ *n = 30*

$$P(X \geq 2) = 1 - \left(\frac{\frac{1}{20} * \frac{19}{20} * 29 + \frac{19}{20}}{5} \right) = 1 - \frac{\frac{551}{400} + \frac{380}{400}}{5} = 1 - \frac{931}{2000} = \boxed{0{,}5345}$$

Ainsi, sur une file de 30 personnes pour le SAV, il y a environ ***53%*** *de chances pour qu'au moins deux d'entre-elles veuille le service Téléphonie.*

II. Loi Binomiale

1. Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une expérience aléatoire de paramètre **p** et qui a deux issues possibles : **le succès ou l'échec**.

Exemple : Dans une classe de 25 élèves, avec 10 garçons et 15 filles, on choisi au hasard un élève. On considère le succès comme avoir un garçon. Ainsi $p = \frac{10}{25} = \frac{4*10}{100} = 0{,}4$: une probabilité de 0,4 soit de 40%.

2. Loi Binomiale

La loi binomiale est en réalité l'expérience de Bernoulli (**deux cas possibles**) répétée n fois **successivement**. De plus il faut qu'elles soient **indépendantes** : c'est-à-dire qu'il ne faut pas que l'expérience précédente ait une influence sur la suivante.

<u>Contre exemple</u> : On désire suivre une recette de cuisine. La recette n'étant pas simple à réaliser, on a une probabilité de succès (p) faible (exemple : p = 0,3). Mais en la réalisant plusieurs fois (successivement), la probabilité d'y parvenir augmente, donc p augmente! Les conditions de résolution par la loi Binomiale ne sont pas respectées.

A la fin de l'expérience, on compte le nombre de succès (p) ou d'échec ($q = 1 - p$) que l'on nommera comme une variable aléatoire X.

$$C_n^x \, p^x \, q^{n-x}$$

avec $C_n^x = \frac{n!}{(n-x)! \; x!}$

Par ailleurs, lorsque le nombre d'expériences est **élevé** et que la probabilité de succès (p) est **faible**, cette loi est proche de la **loi de Poisson** s'exprimant ainsi :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^x}{x!}$$

avec $\lambda = n \, . \, p$

3. Exercice d'application

*Admettons que **1%** des marchandises reviennent en SAV. On a vendu **50** articles. Combien a-t-on de chances que **trois** articles défectueux reviennent en magasin ?*

- ✓ *Utiliser Loi de Binomiale pour x = 3 articles défectueux*

Deux cas sont possibles (réussite, échec), indépendants (chaque article ne dépend pas d'un autre) et successifs (articles vendus avec file d'attente).

N = 50 *p =* $\frac{1}{100}$ *succès* *q =* $\frac{99}{100}$ *échecs* *sachant que* $C_{50}^{3} = \frac{50!}{(50-3)!*3!} = 19600$

$$P(X = 3) = C_{50}^{3}\, p^{3} q^{50-3} = \boxed{0{,}01222}$$

*Nous avons donc environ **0,012 %** de chances qu'il y ai 3 articles sur les 50 vendus qui reviennent en SAV.*

- ✓ *Puis vérifier avec la Loi de Poisson …*

sachant que $\lambda = N * p = 50 * \frac{1}{100} = \boxed{0{,}5}$

$$P(X = 3) = \frac{e^{-0{,}5} * 0{,}5^{3}}{3!} = \boxed{0{,}01263}$$

Ainsi nous remarquons que le résultat est similaire entre la loi de Poisson et la loi Binomiale au millième près.

III. Arrangements

1. Théorie

*On considère soient **n** objets. Un arrangement de **p** objets est obtenu en tirant **p** objets parmi les **n** objets et en les rangeant. Le nombre d'arrangements pour ce type d'énoncé vaut :*

$$N = n * (n-1) * (n-2) * \dots * (n-p+1)$$

On note cette grandeur A_n^p .

2. Application numérique

*On considère que, dans le service étudié, on dispose de **n=500** produits.*

*Dans notre file d'attente composée de **p=15** personnes, on cherche à savoir quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes commanderont le même produit.*

- ✓ *L'événement élémentaire et son complément*

On note un événement élémentaire A décrit par :

A = "au moins 2 personnes de la file d'attente commanderont le même produit"

Ainsi que son complément : $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

- ✓ *Méthode puis Calcul*

On notera que notre expression est sous la forme " $1 - \left(\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}\right)$ *" car on étudie un système équiprobable : chaque personne a la même probabilité de commander un même produit.*

$$P(A) = 1 - \frac{A_{500}^p}{500^p} = 1 - \frac{500 * 499 * 498 * \dots * (500-15+1)}{500^{15}} = \boxed{0{,}19}$$

IV. Espérance, Variance et Ecart type

1. Théorie

a. *Loi de probabilité*

Une loi de probabilité décrit les façons typiques dont se répartissent les fréquences d'apparition des résultats que l'on trouve suite à l'observation d'un phénomène aléatoire.

On y associe une variable aléatoire X pour décrire la répartition des valeurs qu'elle peut prendre au cours du phénomène.

b. *Espérance mathématique*

L'espérance mathématique est la moyenne pondérée, par la probabilité, de toutes les valeurs que prennent les événements de l'espace étudié.

$$E(X) = \sum x\, P(X = x)$$

c. *Variance*

La variance est la traduction chiffrée de la dispersion de la distribution d'une variable aléatoire autour de sa valeur moyenne. Etant un carré, la dimension de la variance n'est pas la même que celle de la moyenne. C'est pourquoi on utilise le plus souvent l'écart type (voir ci-après).

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

d. *Ecart type*

L'écart type est une quantité réelle positive, utilisée pour caractériser la répartition d'une variable aléatoire réelle autour de sa moyenne. On l'obtient, comme dit précédemment, en prenant la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$$

2. Application

On admet qu'un débutant a la probabilité $\boldsymbol{p} = \frac{1}{100}$ *d'effectuer une erreur lors de la prise d'une commande au guichet. On étudie un échantillon de* ***500*** *commandes.*

- ✓ *Loi de probabilité*

Les prises de commande sont des évènements successifs et indépendants. Il y a deux cas possibles : soit la commande est correcte, soit elle ne l'est pas. On peut donc utiliser une loi binomiale de cette façon :

$$P(\,X = x\,) = C_{500}^{x}\left(\frac{1}{100}\right)^{x}\left(1-\frac{1}{100}\right)^{500-x}$$

- ✓ *Espérance* $E(X) = Np = 500 * \frac{1}{100} = \boxed{5}$
- ✓ *Variance* $V(X) = Np(1-p) = 500 * \frac{1}{100} * \left(1-\frac{1}{100}\right) = 5 * \frac{99}{100} = \boxed{4{,}95}$
- ✓ *Ecart type* $\sigma x = \sqrt{Np(1-p)} = \sqrt{4{,}95} = \boxed{2{,}224}$

V. Approfondissement

La théorie des files d'attente est une technique qui permet de modéliser un système admettant un phénomène d'attente, de calculer ses performances et de les déterminer.

En fonction du modèle de la file d'attente, il existe des théories plus ou moins complexes telles que les files d'attentes avec arrivées exponentielles et durées de service exponentielles (MMC).

Nous pouvons définir le **taux de clients** qui arrivent et le **taux de service** par unité de temps (respectivement λ et μ).

Le nombre moyen dans un système stable d'après la Loi de Little est $\lambda * \tau$ (avec τ représentant le temps moyen passé dans le système).

La notation de Kendall permet de décrire toutes les files d'attentes avec 6 symboles :

- **a** La loi de probabilité des instants d'arrivées (avec des différents symboles en fonction de la loi de probabilité utilisée)
- **s** La loi de probabilité de la durée du service.
- **C** Le nombre de guichets
- **K** La capacité totale du système
- **m** La population totale de clients
- **Z** Le disciple de service (premier arrivé, premier servi ou alors dernier arrivé, premier servi)

Ainsi le modèle de file d'attente M/M/1 est le modèle le plus aisé à manipuler puisque nous connaissons les moyens suivant pour la modéliser :

- $\boldsymbol{P_0} = 1 - A$ Probabilité P_0 d'avoir un système vide
- $\boldsymbol{P_a} = A$ Probabilité P_a d'attendre
- $\langle \boldsymbol{N_s} \rangle = A$ Le nombre N_s moyen de clients au guichet
- $\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{A}{1-A}$ Le nombre N moyen de clients dans le système

- $\langle \mathbf{N_a} \rangle = \frac{A^2}{1-A}$ *Le nombre* $\mathrm{N_a}$ *moyen de clients en attente*
- $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-A}$ *Temps* τ *moyen de séjour au sein du système*
- $\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\mu}} < 1$ *Condition d'atteinte de l'équilibre : pas d'accumulation de clients*

Conclusion

1. Les professionnels

Ainsi se termine le résumé de notre étude. Parmi les dizaines de théories et calculs concernant les files d'attente, seulement certaines vous ont été exposées.

Nous sommes fières d'avoir pu mettre nos compétences en pratique avec l'environnement de votre entreprise ainsi que ses données. Cette étude n'est bien évidemment pas exhaustive. La totalité de nos compétences sont à votre disposition.

Nous vous invitons, dans ces conditions, à nous faire parvenir vos commentaires -bons ou mauvais- sur notre étude et espérons avoir détaillé les points nécessaires pour vous convaincre de notre future collaboration.

Cordialement,

ProbAssociés

"Le calcul des probabilités, appliqué à la mortalité humaine a donné naissance à une science nouvelle: celle des assurances."
Emile de Girardin

2. Les élèves

Les études d'entreprise sont l'essence de notre métier. En tant que futur ingénieur, il fût intéressant de combiner le monde mathématique des probabilités aux réflexions pratiques d'une gestion de clients.

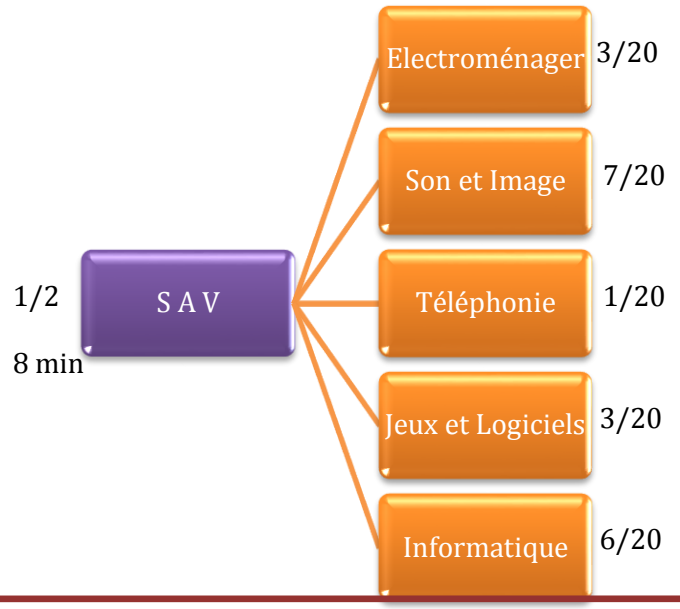
La file d'attente n'est pas qu'un groupe de personnes, c'est une réelle étude théorique. Aux quelques paramètres que nous vous avons exposé dans le paragraphe "Approfondissement", nous pourrions ajouter des dizaines d'autres plus compliqués les uns que les autres !

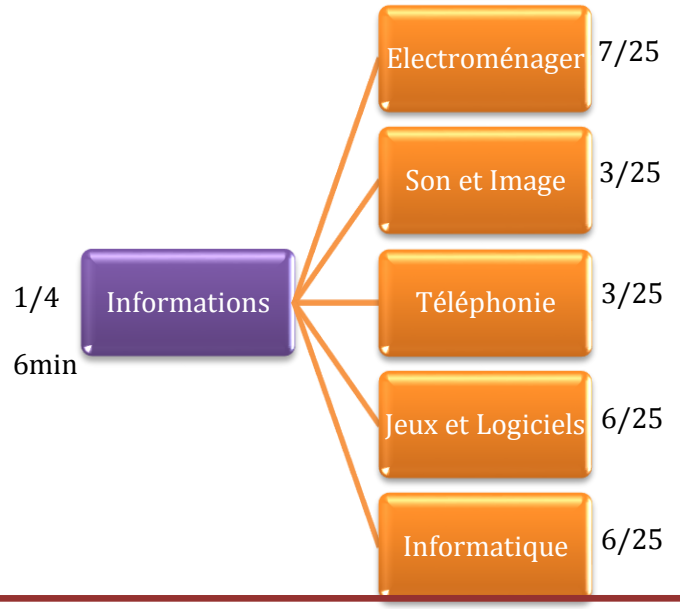
Les Travaux Dirigés et les cours magistraux prennent une toute autre forme lorsque l'on prend le temps d'y trouver des applications dans le fonctionnement d'une société.

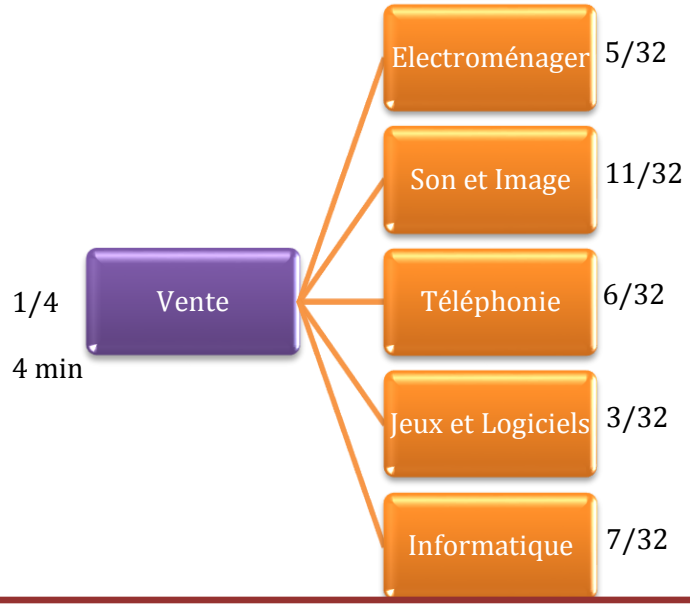
Nous avons ainsi pu découvrir non seulement un vaste monde qu'est celui des théories sur les files d'attente ; mais aussi une toute autre facette des probabilités.

Bien que cette matière soit une des plus concrètes, nous avons été surpris d'être tant inspiré à l'appliquer "sur le terrain" et espérons l'être une nouvelle fois dans le futur.

Annexe


1/2
8 min
S A V
Electroménager 3/20
Son et Image 7/20
Téléphonie 1/20
Jeux et Logiciels 3/20
Informatique 6/20


1/4
6min
Informations
Electroménager 7/25
Son et Image 3/25
Téléphonie 3/25
Jeux et Logiciels 6/25
Informatique 6/25


1/4
4 min
Vente
Electroménager 5/32
Son et Image 11/32
Téléphonie 6/32
Jeux et Logiciels 3/32
Informatique 7/32