

TAI sur la propagation électromagnétique

Exercice 1

- 1- Utiliser les équations de Maxwell pour retrouver l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu matériel quelconque, donnée par :

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \text{grad}(\rho) + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}.$$

On donne : $\Delta \vec{U} = \text{grad}(\text{div}(\vec{U})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{U}))$ pour un vecteur $\vec{U}$ quelconque.

- 2- Réécrire cette équation dans le milieu air (ou vide), donner la signification de la constante $\mu_0 \cdot \epsilon_0$. En déduire la célérité dans le milieu vide (ou air) des ondes électromagnétique.
- 3- Vérifier que le champ électrique $\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(k \cdot x - \omega t) \vec{e}_z$ est bien solution de l'équation obtenue dans la question 2, donner une relation entre k, ω et c.

Exercice 2

Le champ électrique d'une O.P.P.S qui se propage dans l'air est :

$$\vec{E}(x, y, t) = (-3 \cdot 10^4 \vec{e}_x + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^4 \vec{e}_y) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} (2\sqrt{3}x + 2y) \cdot 10^7 - \omega t\right)$$

- 1- Calculer l'amplitude E_0 , donner la direction de propagation, justifier votre réponse.
- 2- Donner les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$, la longueur d'onde λ , pulsation ω , la période T, et la fréquence f.
- 3- Donner les composantes du vecteur champ magnétique en utilisant la notation complexe. Calculer l'amplitude B_0 .

Exercice 3

On considère un champ électrique de la forme :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(k \cdot x - \omega t) \vec{e}_z, \text{ où } k, E_0, \text{ et } \omega \text{ sont des constantes.}$$

- 1) Exprimer le Laplacien du champ électrique : $\Delta \vec{E}$ en fonction de k et de $\vec{E}$
- 2) Exprimer $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ en fonction de ω et de $\vec{E}$.
- 3) En déduire une relation entre k et ω pour que le champ électrique $\vec{E}$ vérifie l'équation de d'Alembert.

Exercice 4

Le champ électrique d'une O.P.P.S qui se propage dans le milieu vide est :

$$\vec{E}(y, z, t) = E_0 \cos\left(k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (y + z) - \omega t\right) \cdot \vec{e}_x, \text{ où } E_0, \omega, \text{ et } k \text{ sont des constantes.}$$

- 1) Donner la direction de propagation. Justifier votre réponse. Calculer $\text{div}(\vec{E})$, commenter ce résultat.

- 2) Donner l'expression du vecteur champ magnétique en utilisant les propriétés d'ondes planes. (Sans faire de calcul).
- 3) Retrouver le champ magnétique par le calcul, en utilisant la 3^{ième} équation de Maxwell en notation complexe (B_0 sera exprimé en fonction de E_0 , k et ω).

Exercice 5

Un faisceau laser de rayon R , d'axe Oz , composé d'O.E.M.P.P.S, tel que l'amplitude du champ électrique est $E_0 = 10^7$ V/m

- 1) Représenter le vecteur de Poynting $\vec{S}$, le vecteur d'onde $\vec{k}$ ainsi que le plan dans lequel se trouve le couple champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$. Justifier votre réponse.
- 2) Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{S}$. (Utiliser les propriétés d'ondes planes).
- 3) Exprimer la puissance moyenne de rayonnement du faisceau, en fonction de R , E_0 , μ_0 et c . Faire le calcul pour $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ S.I, $R = 4$ mm et $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Exercice 6

Une O.E.M.P.P.S se propage avec $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, dans le plan (xoy) , tel que le vecteur d'onde $\vec{k}$ fait un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'axe Ox . L'onde est polarisée rectilignement suivant l'axe $O\vec{z}$.

- 1) Représenter le vecteur $\vec{E}$ et le vecteur d'onde $\vec{k}$ dans le trièdre (Ox, y, z) .
- 2) Donner l'expression $\vec{E}(x, y, t)$
- 3) Retrouver le champ magnétique par le calcul, en utilisant la 3^{ième} équation de Maxwell en notation complexe (B_0 sera exprimé en fonction de E_0 , k et ω).

Exercice 7

1) Décrire l'état de polarisation de chacune des 3 ondes représentées par les champs électriques suivants :

a-
$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_{01} \cos(\alpha) \cdot \cos(k \cdot z - \omega t) \\ E_{01} \sin(\alpha) \cdot \cos(k \cdot z - \omega t) \end{pmatrix}$$

b-
$$\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_{02} \cos(k \cdot z - \omega t) \\ E_{02} \sin(k \cdot z - \omega t) \end{pmatrix}$$

c-
$$\vec{E}_3 = \begin{pmatrix} E_{03} \cos(k \cdot z - \omega t) \\ -E_{03} \sin(k \cdot z - \omega t) \end{pmatrix}$$

2) Quel est l'état de polarisation de l'onde dont le champ électrique est $\vec{E} = \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

En supposant $E_{02} = E_{03} = E_0$. Commenter le résultat.

Exercice 8

Donner les expressions des composantes du champ électrique, pour les ondes planes suivantes :

1. Onde se propageant suivant l'axe Ox et polarisée linéairement à $\pi/3$ de Oy

2. Onde se propageant suivant Oy et polarisée elliptiquement à gauche, le grand axe de l'ellipse, suivant Oz, étant trois fois plus grand que le petit axe et les 2 composantes sont déphasées de $\pi/2$.
3. Onde polarisée linéairement suivant Oy et se propageant dans le plan (xoz), de direction la droite (D) qui fait un angle de $\pi/4$ avec l'axe (Oz).

Exercice 9

1. Un faisceau lumineux parallèle de pulsation ω et de longueur d'onde λ se propageant selon Oz, est décrit par :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(k.z - \omega.t) \\ E_{0y} \sin(k.z - \omega.t) \end{pmatrix}$$

On supposera que les amplitudes E_{0x} et E_{0y} sont des grandeurs essentiellement positives, et que $E_{0x} > E_{0y}$.

Montrer qu'il s'agit d'une vibration elliptique dont on précisera les axes et le sens de Parcours, en retrouvant à partir des composantes, l'équation d'une ellipse

2. Un faisceau lumineux parallèle de pulsation ω et de longueur d'onde λ se propageant selon Oz est décrit par :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(k.z - \omega.t) \\ -E_0 \sin(k.z - \omega.t) \end{pmatrix} \text{ Où } E_0 \text{ est une grandeur positive.}$$

Montrer qu'il s'agit d'une vibration circulaire dont on précisera les axes et le sens de parcours. (Retrouver l'équation analytique d'un cercle)

Exercice 10

- 1) Ecrire le champ électrique d'une O.P.P.S, d'amplitude E_0 , de pulsation ω , qui se propage dans l'air, selon l'axe $O\vec{x}$ et qui est polarisée rectilignement selon Oz. Calculer sa fréquence pour $\omega = 2\pi \cdot 10^{14} \text{ rad/s}$.
- 2) Utiliser la 3^{ème} équation de Maxwell, en notation complexe, pour exprimer les composantes du champ magnétiques. Calculer B_0 , sachant que $E_0 = 10^2 \text{ V/m}$ et $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.
- 3) En déduire les composantes du vecteur de Poynting, Calculer son amplitude. On donne : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I}$
- 4) Exprimer la puissance de rayonnement à la distance R de la source, sachant **que celle-ci émet dans toutes les directions, et est très proche de la terre.**

Exercice 11

- 1) Ecrire le champ électrique, d'amplitude E_0 , d'une OPPS qui se propage dans l'air, sur l'axe Oz et qui est polarisée rectilignement selon l'axe $O\vec{y}$. En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}$. (Utiliser la notation complexe). Vérifier ce résultat en utilisant les propriétés d'ondes planes dans le vide (ou dans l'air).

- 2) Exprimer les composantes du vecteur de Poynting.
- 3) Exprimer la puissance moyenne de rayonnement reçue par un écran carré de côté a , placée perpendiculairement à l'axe Oz , à la distance z_0 du point O , en fonction de E_0 , μ_0 , c et a .

Exercice 12

On considère une source d'onde radio, placée au point O , **loin de la terre et qui émet dans toutes les directions**. L'onde est supposée plane, progressive et sinusoïdale. Le champ électrique est d'amplitude $E_0 = 10^3 \text{ V/m}$ et de pulsation ω .

- 1) Ecrire l'expression du champ électrique à la distance $x = R$ du centre O , sachant que la propagation est selon l'axe radial Ox et l'onde est polarisée rectilignement selon Oy . En déduire l'expression du champ magnétique.
- 2) Donner l'expression du vecteur de Poynting à la distance R , exprimer l'amplitude S_0 en fonction de E_0 , μ_0 et c .
- 3) Exprimer la puissance moyenne de rayonnement, à la distance R , en fonction de R , E_0 , μ_0 et c . Faire le calcul pour $R=10\text{km}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I}$ et $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Exercice 13 Onde guidée

Une onde se propage dans un guide d'onde métallique de section carrée de côté. Le milieu du guide est l'air et la vitesse de propagation est $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Le champ électrique de l'onde s'écrit :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) \cos(k \cdot z - \omega \cdot t) \vec{e}_x$$

1-Utiliser l'équation de d'Alembert pour montrer la relation :

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

2- Donner la condition vérifiée par la pulsation ω dans le cas d'une propagation. En déduire la fréquence de coupure f_c . Faire le calcul pour $a = 1\text{cm}$.

3-Donner les composantes du champ magnétique $\vec{B}$. (Utiliser la 3^{ème} équation de Maxwell). Commenter ce résultat. (**Ne pas utiliser la notation complexe car l'onde n'est pas plane**).