EFREI-ESIGETEL
2013/2014

TAI sur la propagation électromagnétique

Exercice 1

1- Utiliser les équations de Maxwell pour retrouver l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu matériel quelconque, donnée par :

$$\Delta\vec{B} - \mu.\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu\vec{rot}(\vec{J}).$$

On donne : $\Delta\vec{U} = \vec{grad}(div(\vec{U})) - \vec{rot}(\vec{rot}(\vec{U}))$ pour un vecteur $\vec{U}$ quelconque.

2- Réécrire cette équation dans le milieu air (ou vide), donner la signification de la constante $\mu_0.\varepsilon_0$. En déduire la célérité dans le milieu vide (ou air) des ondes électromagnétique.

3- Vérifier que le champ magnétique $\vec{B}(x,t) = B_0\cos(k.x - \omega.t)\vec{e}_Z$ est bien solution de l'équation obtenue dans la question 2, en déduire une relation entre k, ω et c.

Exercice 2

Le champ électrique d'une O.P.P.S qui se propage dans l'air est :

$$\vec{E}(x,y,t) = (-3.10^4\vec{e}_x + 3.\sqrt{3}.10^4\vec{e}_y).\cos(\frac{\pi}{3}(2\sqrt{3}x + 2y).10^7 - \omega.t)$$

1- Calculer l'amplitude E_0, donner la direction de propagation, justifier votre réponse.

2- Donner les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$, la longueur d'onde λ, pulsation ω, la période T, et la fréquence f.

3-Donner les composantes du vecteur champ magnétique en utilisant la notation complexe. Calculer l'amplitude B_0.

Exercice 3 Onde Laser

Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique d'axe Oz et de rayon R . Ce faisceau est composé d'une OPPS monochromatique, de longueur d'onde λ = 632, 8nm.
On donne : $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$S.I, c = 3.10^8ms^{-1}, R = 1mm.

1- Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{S}$, en déduire l'expression de la puissance de rayonnement.

2- Calculer les amplitudes E_0 du champ électrique et B_0 du champ magnétique , sachant que la puissance moyenne du laser est de 1mW.

3- Calculer la densité maximale d'énergie électromagnétique en déduire la densité de photons contenue dans ce faisceau (nombre de photons par m^3)

Exercice 4

Le champ électrique d'une O.P.P.S qui se propage dans le milieu vide est :

$\vec{E}(y,z,t) = E_0 \cos(k.\frac{\sqrt{2}}{2}(y+z) - \omega.t).\vec{e}_x$, où E_0, ω, et k sont des constantes.

1) Donner les composantes du vecteur d'onde, en déduire la direction de propagation. Justifier votre réponse. Calculer $div(\vec{E})$, commenter ce résultat.
2) Donner l'expression du vecteur champ magnétique en utilisant les propriétés d'ondes planes. (Sans faire de calcul).
3) Retrouver le champ magnétique par le calcul, en utilisant la 3ième équation de Maxwell en notation complexe (B_0 sera exprimé en fonction de E_0, k et ω).

Exercice 5

Un faisceau laser de rayon R, d'axe Oz, composé d'O.E.M.P.P.S, tel que l'amplitude du champ électrique est $E_0 = 10^7$ V/m

1) Représenter le vecteur de Poynting $\vec{S}$, le vecteur d'onde $\vec{k}$ ainsi que le plan dans lequel se trouve le couple champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$. Justifier votre réponse.
2) Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{S}$. (Utiliser les propriétés d'ondes planes).
3) Exprimer la puissance moyenne de rayonnement du faisceau, en fonction de R, E_0, μ_0 et c. Faire le calcul pour $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ S.I$, R = 4mm et c = 3.10^8m/s.

Exercice 6

Une O.E.M.P.P.S se propage avec c = 3.10^8m/s, dans le plan (xoy), tel que le vecteur d'onde $\vec{k}$ fait un angle α = 30° avec l'axe Ox. L'onde est polarisée rectilignement suivant l'axe $O\vec{z}$.

1) Donner les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$ sachant que k = $\pi.10^7$ rd.m^{-1}. En déduire la longueur d'onde λ.

2) Représenter le vecteur $\vec{E}$ et le vecteur d'onde $\vec{k}$ dans le trièdre (O,x,y,z). Donner l'expression $\vec{E}(x,y,t)$

3) Retrouver le champ magnétique par le calcul, en utilisant la 3ième équation de Maxwell en notation complexe (B_0 sera exprimé en fonction de E_0, k et ω).

Exercice 7

1) Décrire l'état de polarisation de chacune des 3 ondes représentées par les champs électriques suivants : a- $\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_{01}\cos(\alpha).\cos(k.z-\omega.t) \\ E_{01}\sin(\alpha).\cos(k.z-\omega.t) \end{pmatrix}$ b- $\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_{02}\cos(k.z-\omega.t) \\ E_{02}\sin(k.z-\omega.t) \end{pmatrix}$

c- $\vec{E}_3 = \begin{pmatrix} E_{03}\cos(k.z-\omega.t) \\ -E_{03}\sin(k.z-\omega.t) \end{pmatrix}$

2) Quel est l'état de polarisation de l'onde dont le champ électrique est $\vec{E} = \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

En supposant $E_{02} = E_{03} = E_0$. Commenter le résultat.

Exercice 8

Donner les expressions des composantes du champ électrique, pour les OPPS suivantes :

1. Onde se propageant suivant l'axe Ox et polarisée linéairement à π/3 de Oy
2. Onde se propageant suivant Oy et polarisée elliptiquement à gauche, le grand axe de l'ellipse, suivant Oz, étant trois fois plus grand que le petit axe et les 2 composantes sont déphasées de $\pi/2$.
3. Onde polarisée linéairement suivant Oy et se propageant dans le plan (xoz), de direction la droite (D) qui fait un angle de π/4 avec l'axe (Oz).

Exercice 9

1. Un faisceau lumineux parallèle de pulsation ω et de longueur d'onde λ se propageant selon Oz, est décrit par :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x}\cos(k.z-\omega.t) \\ E_{0y}\sin(k.z-\omega.t) \end{pmatrix}$$

On supposera que les amplitudes E_{0x} et E_{0y} sont des grandeurs essentiellement positives, et que $E_{0x} > E_{0y}$.

Montrer qu'il s'agit d'une vibration elliptique dont on précisera les axes et le sens de Parcours, en retrouvant à partir des composantes, l'équation d'une ellipse

2. Un faisceau lumineux parallèle de pulsation ω et de longueur d'onde λ se propageant selon Oz est décrit par :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0\cos(k.z-\omega.t) \\ -E_0\sin(k.z-\omega.t) \end{pmatrix}$$ Où E_0 est une grandeur positive.

Montrer qu'il s'agit d'une vibration circulaire dont on précisera les axes et le sens de parcours. (Retrouver l'équation analytique d'un cercle)

Exercice 10

1) Ecrire le champ électrique d'une O.P.P.S, d'amplitude E_0, de pulsation ω, qui se propage dans l'air, selon l'axe $O\vec{x}$ et qui est polarisée rectilignement selon Oz. Calculer sa fréquence pour $\omega = 2\pi.10^{14} rad/s$.

2) Utiliser la 3ième équation de maxwell, en notation complexe, pour exprimer les composantes du champ magnétiques. Calculer B_0, sachant que $E_0 = 10^2 V/m$ et c = 3.10^8m/s.

3) En déduire les composantes du vecteur de Poynting, Calculer son amplitude. On donne : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} S.I$

4) Exprimer la puissance de rayonnement à la distance R de la source, sachant **que celle-ci émet dans toutes les directions, et est très proche de la terre.**

Exercice 11

1) Ecrire le champ électrique, d'amplitude E_0, d'une OPPS qui se propage dans l'air, sur l'axe Oz et qui est polarisée rectilignement selon l'axe $O\vec{y}$. En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}$. (Utiliser la notation complexe). Vérifier ce résultat en utilisant les propriétés d'ondes planes dans le vide (ou dans l'air).

2) Exprimer les composantes du vecteur de Poynting.

3) Exprimer la puissance moyenne de rayonnement reçue par un écran carré de côté a, placée perpendiculairement à l'axe $O\vec{z}$, à la distance z_0 du point O, en fonction de E_0, μ_0, c et a.

Exercice 12

On considère une source d'onde radio, placée au point O, **loin de la terre et qui émet dans toutes les directions**. L'onde est supposée plane, progressive et sinusoïdale. Le champ électrique est d'amplitude $E_0 = 10^3 V/m$ et de pulsation ω.

1) Ecrire l'expression du champ électrique à la distance x = R du centre O, sachant que la propagation est selon l'axe radial $O\vec{x}$ et l'onde est polarisée rectilignement selon Oy. En déduire l'expression du champ magnétique.

2) Donner l'expression du vecteur de Poynting à la distance R, exprimer l'amplitude S_0 en fonction de E_0, μ_0 et c.

3) Exprimer la puissance moyenne de rayonnement, à la distance R, en fonction de R, E_0, μ_0 et c. Faire le calcul pour R=10km, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ S.I$ et c = 3.10^8m/s.

Exercice 13 Onde guidée

Une onde se propage dans un guide d'onde métallique de section carrée de côté. Le milieu du guide est l'air et la vitesse de propagation est c = 3.10^8m/s. Le champ électrique de l'onde s'écrit :

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi.x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi.y}{b}\right)\cos(k.z-\omega.t)\ \vec{e}_x$$

1-Utiliser l'équation de d'Alembert pour montrer la relation :

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+k^2-\frac{\omega^2}{c^2}=0$$

2- Donner la condition vérifiée par la pulsation ω dans le cas d'une propagation. En déduire la fréquence de coupure f_c. Faire le calcul pour a = 1cm.

3- a) L'onde est-elle plane ? justifier votre réponse.

b) Donner les composantes du champ magnétique $\vec{B}$. (Utiliser la 3ième équation de Maxwell et pas en notation complexe).