

TAI de propagation électromagnétique

Exercice 1

1) Utiliser les équations de Maxwell pour retrouver l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu matériel quelconque donnée par :

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \text{grad}(\rho) + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

On donne : $\Delta \vec{U} = \text{grad}(\text{div}(\vec{U})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{U}))$ pour un vecteur $\vec{U}$ quelconque.

2) Réécrire cette équation dans le milieu air (ou vide), donner la signification de la constante $\mu_0 \cdot \varepsilon_0$. En déduire la célérité dans le milieu vide (ou air) des ondes électromagnétique.

3) Le champ électrique d'expression $\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \vec{e}_z$ est solution de l'équation obtenue dans la question 2, en déduire une relation entre k , ω et c .

Exercice 2

Le champ électrique d'une onde radio, considérée comme O. P.P.S, qui se propage dans l'air avec une vitesse $c = 3.10^8 \text{ m/s}$ est :

$$\vec{E}(y, z, t) = (10^2 \vec{e}_y - \sqrt{3} \cdot 10^2 \vec{e}_z) \cdot \cos\left(\pi \frac{\sqrt{2}}{2} (y + z) - \omega \cdot t\right)$$

1) Donner les composantes du vecteur $\vec{E}_0$, ainsi que les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$, en déduire la valeur de l'amplitude E_0 et celle de la norme du vecteur d'onde $\vec{k}$.

2) Calculer la longueur d'onde λ , la pulsation ω , la période T , ainsi que la fréquence f de l'onde.

3) Utiliser une des équations de Maxwell en notation complexe pour calculer les composantes du Champ magnétique $\vec{B}$. Représenter ce vecteur dans le trièdre (Oxyz) et calculer son amplitude B_0 .

Exercice 3

Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique d'axe (Oz) et de rayon R . Ce faisceau est composé d'une OPPS monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$.

On donne : $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I.}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ et $R = 1 \text{ mm}$.

1) Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{S}$, en utilisant les propriétés d'ondes planes dans l'air.

2) Retrouver l'expression de la puissance de rayonnement en fonction de S_0 et R . Expliciter S_0 .

3) Calculer les amplitudes E_0 du champ électrique et B_0 du champ magnétique, sachant que la puissance moyenne du laser est de 1 mW .

Exercice 4

- 1) Retrouver la deuxième équation de Maxwell donnée par : $\text{div}(\vec{B}) = 0$
- 2) Retrouver la première équation de Maxwell donnée par : $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon}$
- 3) Utiliser cette dernière équation pour établir la densité volumique de charges électriques d'une distribution sphérique qui crée un champ électrique d'expression :

$$E_r(r) = \frac{K}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2} \right) ; \text{Où } K \text{ et } \epsilon_0 \text{ sont des constantes.}$$

On donne :

- Théorème de Green-Ostrogradski : $\oiint_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \text{div}(\vec{U}) d\tau$
- Divergence en coordonnées sphériques :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$$

Exercice 5

Un faisceau laser de rayon R , d'axe Oz , composé d'O.E.M.P.P.S, tel que l'amplitude du champ électrique est $E_0 = 10^7 \text{ V/m}$

- 1) Représenter le vecteur de Poynting $\vec{S}$, le vecteur d'onde $\vec{k}$ ainsi que le plan dans lequel se trouve le couple champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$. Justifier votre réponse.
- 2) Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{S}$. (Utiliser les propriétés d'ondes planes).
- 3) Exprimer la puissance moyenne de rayonnement du faisceau, en fonction de R , E_0 , μ_0 et c . Faire le calcul pour $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I}$, $R = 4\text{mm}$ et $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Exercice 6

Une onde électromagnétique lumineuse (supposée plane, progressive et sinusoïdale) se propage dans l'air suivant une droite (D) du plan (xoz) qui fait un angle $\alpha = 45^\circ$ avec l'axe $O\vec{x}$.

- 1) Donner les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de k . Calculer la longueur d'onde λ , la pulsation ω et la fréquence f de l'onde, sachant que $k = \frac{2\pi}{5} \cdot 10^7 \text{ rd.m}^{-1}$.
- 2) Ecrire le vecteur champ électrique sachant que cette onde est polarisée rectilignement suivant $O\vec{y}$.
- 3) En déduire les composantes du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ en utilisant la notation complexe, en déduire celles du vecteur de Poynting.

Exercice 7

Donner les expressions des composantes du champ électrique, pour les OPPS suivantes :

- 1) Onde se propageant suivant l'axe Oz et polarisée linéairement à $\pi/3$ de l'axe (Ox).
- 2) Onde se propageant suivant Oy et polarisée elliptiquement à gauche, le demi-grand axe de l'ellipse sur l'axe (Oz) étant trois fois plus grand que le demi-petit axe.
- 3) Onde polarisée linéairement suivant Oy et se propageant dans le plan (xoz), de direction la droite (D) qui fait un angle de $\pi/4$ avec l'axe (Oz).

Exercice 8

1) Décrire l'état de polarisation de chacune des 3 ondes représentées par les champs électriques suivants **en justifiant votre réponse**

a) $\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_{01} \cos(\alpha) \cdot \cos(k.z - \omega.t) \\ E_{01} \sin(\alpha) \cdot \cos(k.z - \omega.t) \end{pmatrix}$; b) $\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_{02} \cos(k.z - \omega.t) \\ E_{02} \sin(k.z - \omega.t) \end{pmatrix}$; c) $\vec{E}_3 = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(k.z - \omega.t) \\ -E_{0y} \sin(k.z - \omega.t) \end{pmatrix}$

2) Quel est l'état de polarisation de l'onde dont le champ électrique est $\vec{E} = \vec{E}_2 + \vec{E}_3$, en supposant $E_{02} = E_{03} = E_0$. Commenter le résultat.

3) Ecrire les composantes du champ électrique d'une O.P.P.S qui se propage sur l'axe (Oy) et qui est polarisée rectilignement à $\pi/6$ de l'axe (Ox). Faire un schéma des composantes du champ électrique.

Exercice 9

1) Les composantes du champ électrique d'un faisceau lumineux de pulsation ω se propageant selon

Oz, sont données par : $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(k.z - \omega.t) \\ E_{0y} \sin(k.z - \omega.t) \end{pmatrix}$

On supposera que les amplitudes E_{0x} et E_{0y} sont des grandeurs positives, et que $E_{0x} > E_{0y}$.

Retrouver l'équation décrite par les composantes E_x et E_y du champ électrique, en déduire le type de polarisation du faisceau.

2) Les composantes du champ électrique d'un faisceau lumineux de pulsation ω se propageant selon Oz, sont données par :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(k.z - \omega.t) \\ -E_0 \sin(k.z - \omega.t) \end{pmatrix} \quad \text{Où } E_0 \text{ est une grandeur positive.}$$

Retrouver l'équation décrite par les composantes E_x et E_y du champ électrique, en déduire le type de polarisation du faisceau.

3) Ecrire les composantes du champ électrique d'une O.P.P.S qui se propage sur l'axe (Oy) et qui est polarisée rectilignement à $\pi/3$ de l'axe (Ox). Faire un schéma des composantes du champ électrique.

Exercice 10

- 1) Ecrire le champ électrique d'une O.P.P.S, d'amplitude E_0 , de pulsation ω , qui se propage dans l'air, selon l'axe $O\vec{x}$ et qui est polarisée rectilignement selon Oz. Calculer sa fréquence pour $\omega = 2\pi \cdot 10^{14} \text{ rad/s}$.
- 2) Utiliser la 3^{ème} équation de Maxwell, en notation complexe, pour exprimer les composantes du champ magnétiques. Calculer B_0 , sachant que $E_0 = 10^2 \text{ V/m}$ et $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.
- 3) Exprimer la puissance de rayonnement à la distance R de la source, sachant **que celle-ci émet dans toutes les directions, et est très proche de la terre.**

Exercice 11

On considère une source d'onde radio, placée au point O, **loin de la terre et qui émet dans toutes les directions**. L'onde est supposée plane, progressive et sinusoïdale. Le champ électrique est d'amplitude $E_0 = 10^3 \text{ V/m}$ et de pulsation ω .

- 1) Ecrire l'expression du champ électrique à la distance $x = R$ du centre O, sachant que la propagation est selon l'axe radial $O\vec{x}$ et l'onde est polarisée rectilignement selon Oy. En déduire l'expression du champ magnétique, en utilisant les propriétés des ondes planes.
- 2) Donner l'expression du vecteur de Poynting à la distance R, exprimer l'amplitude S_0 en fonction de E_0 , μ_0 et c. Calculer S_0 .
- 3) Exprimer la puissance moyenne de rayonnement à la distance R, en fonction de R, E_0 , μ_0 et c. Faire le calcul pour $R=10\text{km}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I}$ et $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Exercice 12 *Guide d'ondes métallique*

Une onde se propage dans un guide d'onde métallique de section carrée de côté. Le milieu du guide est l'air et la vitesse de propagation est $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Le champ électrique de l'onde s'écrit :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{b}\right) \cos(k \cdot y - \omega \cdot t) \vec{e}_z$$

- 1) Utiliser l'équation de d'Alembert pour montrer la relation :

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

- 2) Donner la condition vérifiée par la pulsation ω dans le cas d'une propagation. En déduire la fréquence de coupure f_c . Faire le calcul pour $a = 1\text{cm}$.

3- a) L'onde est-elle plane ? Justifier votre réponse.

- b) Donner les composantes du champ magnétique $\vec{B}$.