Exercice 12 : $\vec{E}(x,y,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(kz - \omega t)\,\vec{e_x}$

1- L'onde se propage suivant $\vec{Oz}$ et $\vec{E}$ est porté par $\vec{Ox}$

Equation de d'Alembert $\leftrightarrow$ milieu vide donc air = vide.

Equation de d'Alembert pour un champ $\vec{E}$: $\vec{\Delta E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ ou $\boxed{\vec{\Delta E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

On calcule le laplacien : $\vec{\Delta E} = \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $\vec{E}$ dans notre cas a une seule composante E_x

On dérive une fois : $\Delta E_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\pi}{b}\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-k\sin(kz-\omega t)\right)$

On dérive une seconde fois : $\Delta E_x = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) - k^2 \cos(kz-\omega t)$

Soit $\Delta E_x = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 E_x - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 E_x - k^2 E_x$

$\vec{\Delta E} = \left(-\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2\right]\right)\vec{E}$ car $E_x \vec{e_x} = \vec{E}$

Par ailleurs, $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$ $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (-i\omega)(-i\omega) = -\omega^2\right)$.

Donc, $\vec{\Delta E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \Leftrightarrow -\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2\right]\vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(-\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2\right] + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E} = \vec{0}$

$\boxed{\text{Or } \vec{E} \neq 0 \text{ donc } \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0}$

... dans le guide que si et seulement si $k > 0$

$\omega = c \times k$ fc

Or $E \neq 0$ donc $\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

2- L'onde peut se propager dans le guide que si et seulement si $k > 0$

Donc, $k^2 > \frac{\omega^2}{c^2} - \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right] \Leftrightarrow k > \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]}$ $\quad \omega = c \times k \quad f_c = \frac{\omega}{2\pi}$

à vérifier $\Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} \gg \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$ Donc, pour que $k > 0$ il faut une pulsation ω élevée et supérieure à c -

D'où condition vérifiée pour la pulsation ω.

Fréquence de coupure → lorsque k est nul.

$k = 0 \rightarrow \frac{\omega_c^2}{c^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \omega_c = c\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$ $\quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$

Application numérique : Section carrée donc $a = b = 1\,cm = 0,01\,m$

$f_c = \frac{3.10^8}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\pi}{0,01}\right)^2 \times 2} = 2,12.10^{12}\,Hz = 2,12.10^6\,MHz$

3- a) Oui plane car forme $E_0 \cos(k_g z - \omega t)\vec{e_x}$

b) $\vec{rot}(\vec{E}) = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$

$= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E(x,y,z,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E}{\partial z} \\ -\frac{\partial E}{\partial y} \end{pmatrix}$