

1

TAI - Champs électromag.

Exercice 1.

1.

a) $\text{div}(\vec{E}') = \frac{\rho}{\epsilon}$

Gauss - Maxwell

$\text{div}(\vec{B}') = 0$

Thomson - Maxwell

$\text{rot}(\vec{E}') = - \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}$

Faraday - Maxwell

$\text{rot}(\vec{B}') = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t}$

Ampère - Maxwell

b) On sait que $\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ \vec{B}' = \vec{B}_0 e^{i(kx - \omega t)} \end{cases}$

$i\vec{k} \cdot \vec{E}' = \frac{\rho}{\epsilon}$

$i\vec{k} \cdot \vec{B}' = 0$

$\vec{k} \wedge \vec{E}' = \omega \vec{B}'$

avec $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \\ \vec{\nabla} = i\vec{k} \end{cases}$

$\vec{k} \wedge \vec{B}' = \mu \vec{J} - i\omega \mu \epsilon \vec{E}'$

(2)

2.

$$* \operatorname{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos(ky - \omega t) \end{pmatrix}$$

$$= 0 + 0 + \frac{d(E_0 \cos(ky - \omega t))}{dz}$$

$$= 0.$$

Or, s'il n'y a pas de charge dans le milieu :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \text{ car } \rho = 0.$$

$$* \operatorname{div}(\vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \cos(ky - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{d(B_0 \cos(ky - \omega t))}{dx} + 0 + 0$$

$$= 0.$$

(3)

$$* \vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos(ky - \omega t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - 0 \\ 0 - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ 0 - 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{\partial E_z}{\partial y} = -k E_0 \sin(ky - \omega t).$$

$$\text{Or } -\frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_0 \sin(ky - \omega t).$$

$$* \vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_0 \cos(ky - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - 0 \\ 0 - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \vec{\text{rot}}(\vec{B}) = k B_0 \sin(ky - \omega t)$$

$$= \mu J + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

④

Exercice 2 :

1.

$$\Delta \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & + & 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 \\ -R^2 E_0 \cos(Rx - \omega t) & + & 0 & + & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R^2 E_0 \cos(Rx - \omega t) \end{pmatrix}$$

$$= -R^2 \vec{E} \quad (\text{vecteur porté par l'axe } O_z)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \omega E_0 \sin(Rx - \omega t) \vec{e}_z$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(Rx - \omega t) \vec{e}_z = -\omega^2 \vec{E}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 & \Rightarrow & -R^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 (-\omega^2 \vec{E}) = 0 \\ & & \Rightarrow & -R^2 \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} = 0 \\ & & \Rightarrow & \vec{E} (\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - R^2) = 0 \end{aligned}$$

Or, $\vec{E}$ n'est pas nul, donc :

$$\begin{aligned} \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - R^2 &= 0 \\ \Rightarrow R^2 &= \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \\ \Rightarrow R &= \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \\ \Rightarrow \frac{\omega}{R} &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \end{aligned}$$

5

b)

λ est homogène à $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$

ω est homogène à $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

On a donc :

$$\frac{[\omega]}{[\lambda]} = \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \left[\frac{\text{m}}{\text{rad}} \right] = \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Ainsi, $\frac{\omega}{\lambda}$, et donc $\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$, est homogène à $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
(donc à une vitesse).

3.

On sait que $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Or, $\text{rot}(\vec{E}) = i\vec{k} \wedge \vec{E}$ et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}$.

On a donc $i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E})$$

$$= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ kE \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\omega} k E(x,t) \vec{e}_y$$

$$= \frac{1}{\omega} k E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y$$

De ce fait, $B_0 = \frac{k E_0}{\omega}$.

Or, $k = \frac{\omega}{c}$ donc $B_0 = \frac{E_0}{c}$.

Ainsi, $\vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ B(x,t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

(6)

Exercice 3 :

1.

$$\begin{aligned}
 \Delta \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
 &= \vec{\text{grad}}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right) - \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
 &= \frac{1}{\epsilon} \vec{\text{grad}}(\rho) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}}(\vec{B}) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
 &= \frac{1}{\epsilon} \vec{\text{grad}}(\rho) + \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
 &= \frac{1}{\epsilon} \vec{\text{grad}}(\rho) + \frac{\partial \mu \vec{J}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
 &= \frac{1}{\epsilon} \vec{\text{grad}}(\rho) + \frac{\partial \mu \vec{J}}{\partial t} \\
 &= \frac{1}{\epsilon} \vec{\text{grad}}(\rho) + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

2.

Dans le vide, on a $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$, $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$.

$$\begin{aligned}
 \text{On obtient donc : } \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\text{grad}}(0) + \mu_0 \frac{\partial \vec{0}}{\partial t} \\
 &= \vec{0} \quad (\text{équation d'Alembert})
 \end{aligned}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \text{ en } \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2 \text{ donc } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$$

$$\text{Or, } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI} \quad \text{et} \quad \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ SI}.$$

$$\text{Donc } c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

7

3.

$$\begin{aligned}\vec{E}(x,t) &= E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y \\ &= E_0 \cos(k(x - ct)) \vec{e}_y \\ &= E_0 \cos(kx - kct) \vec{e}_y.\end{aligned}$$

Done $\omega = kc.$

(8)

Exercice 4 :

1.

On a $\vec{E}(y, z, t) = \underbrace{(10^2 \vec{e}_y - \sqrt{3} \cdot 10^2 \vec{e}_z)}_{\text{composantes de } \vec{E}_0} \cos \underbrace{\left(\pi \frac{\sqrt{2}}{2} (y+z) - \omega t \right)}_{\text{composantes de } \vec{k}}.$

Donc $\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^2 \\ -\sqrt{3} \cdot 10^2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_t}$ et $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}_{\vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_t}.$

Ainsi : $E_0 = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2}$
 $= \sqrt{0^2 + (10^2)^2 + (-\sqrt{3} \cdot 10^2)^2}$
 $= \sqrt{0 + 10^4 + 3 \cdot 10^4}$
 $= \sqrt{10^4 (1+3)}$
 $= 10^2 \sqrt{4}$
 $= 2 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$

et $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$
 $= \sqrt{0^2 + \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right)^2}$
 $= \sqrt{0 + \frac{2\pi^2}{4} + \frac{2\pi^2}{4}}$
 $= \sqrt{\pi^2}$
 $= \pi \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}.$

(9)

2.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ m.}$$

Il s'agit d'une onde radio de grande longueur d'onde.

$$\omega = kc = 3\pi \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi \cdot 10^8}{2\pi} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ Hz.}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,5 \cdot 10^8} \text{ s} \quad (\approx 6,7 \cdot 10^{-9} \text{ s}).$$

3.

$$\text{On a } \text{rot}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

$$\text{Or, } \vec{\nabla} = i\vec{k} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \text{ (notation complexe).}$$

$$\text{Donc : } i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E}).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \vec{B} &= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k_y E_z - k_z E_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\pi\sqrt{2} \cdot 10^2}{2\omega} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos\left(\pi \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z) - \omega t\right). \end{aligned}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{2 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^8} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-6} \text{ Tesla} \quad (\approx 0,67 \cdot 10^{-6} \text{ Tesla}).$$

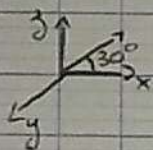
Exercice 5:

1.

a)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 10^7} = \frac{1}{10^7} = 10^{-7} \text{ m.}$$

b)



La direction de propagation suit un angle de 30° par rapport à l'axe $\vec{Ox}$.

$$(\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(30^\circ) = \frac{1}{2})$$

2.

$$\vec{E}(x, z, t) = 10^7 (\vec{e}_x + \vec{e}_z) \cos(k_x x + k_z z - \omega t)$$

3.

On a $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Or, $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = i\vec{k} \wedge \vec{E}$ et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}$.

Donc on a : $i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E})$$

$$= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \pi\sqrt{3} \cdot 10^7 \\ 0 \\ \pi \cdot 10^7 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 - \pi E_y \cdot 10^7 \\ 0 \\ \pi E_y \sqrt{3} \cdot 10^7 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$$

Donc $B(x, z, t) = B_0 \cos(k_x x + k_z z - \omega t) = 2 \cos\left(k \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{k}{2} z - \omega t\right)$.

(11)

Exercice 6 :

1.

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Propagation sur $\vec{O}_z$ et $\vec{E} \perp \vec{B}$. $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_z)$ trièdre direct $\Rightarrow \vec{E} \wedge \vec{B} = EB \vec{e}_z$.

$$\text{On a donc } \vec{S} = \frac{EB}{\mu_0} \vec{e}_z = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2(kz - \omega t) \vec{e}_z.$$

avec $S_0 = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}$ l'amplitude de $\vec{S}$.

2.

$$\begin{aligned} P_{\text{ray}} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} S(z, t) r dr d\theta = S(z, t) \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R \cdot [\theta]_0^{2\pi} \\ &= S(z, t) \frac{R^2}{2} 2\pi \\ &= S(z, t) \pi R^2. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_{\text{moy}} = \frac{S_0}{2} \pi R^2 = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} \pi R^2.$$

$$\text{Or, } B_0 = \frac{E_0}{c}. \text{ Donc } P_{\text{moy}} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} \pi R^2.$$

3.

$$P_{\text{moy}} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad E_0 = \sqrt{\frac{2c\mu_0 P_{\text{moy}}}{\pi R^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 1^2 \cdot (10^{-3})^2}} = \sqrt{24 \cdot 10^4} = \sqrt{24} \cdot 10^2 \text{ V.m}^{-1}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{\sqrt{24} \cdot 10^2}{3 \cdot 10^8} = \frac{\sqrt{24}}{3} \cdot 10^{-6} \text{ Tesla. } (E_0 \approx 489,9 \text{ V.m}^{-1} \text{ et } B_0 \approx 1,63 \cdot 10^{-6} \text{ Tesla})$$

Exercice 7 :

1.

Propriété fondamentale de $\vec{B}$: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ pour tout $\vec{B}$.

Or, d'après le théorème de Green - Ostrogradski :

$$\oint_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{U}) d\mathcal{V}.$$

Par conséquent : $\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{B}) d\mathcal{V} = 0$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{B}) = 0.$$

2.

Selon le théorème de Gauss :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon} \quad \text{avec} \quad Q_{\text{int}} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$$

$$\text{Donc} \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}}{\epsilon} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon} d\mathcal{V}$$

Or, d'après le théorème de Green - Ostrogradski :

$$\oint_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{U}) d\mathcal{V}.$$

$$\text{Donc} \quad \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{E}) d\mathcal{V}$$

$$\Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} (\text{div}(\vec{E}) - \frac{\rho}{\epsilon}) d\mathcal{V} = 0$$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{E}) - \frac{\rho}{\epsilon} = 0$$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon}.$$

3.

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \epsilon_0 \text{div}(\vec{E}).$$

$$\text{On a } E_r(r) = \frac{K}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5r^2} \right).$$

Coordonnées
sphériques (R, Φ, Θ)

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}.$$

$$= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \left(\frac{KR}{5\epsilon_0} - \frac{KR^3}{5\epsilon_0 d^2} \right) \right) + \dots$$

$$= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{KR^3}{5\epsilon_0} - \frac{KR^5}{5\epsilon_0 d^2} \right) + \dots$$

$$= \frac{1}{R^2} \left(\frac{KR^2}{\epsilon_0} - \frac{KR^4}{\epsilon_0 d^2} \right) + \dots$$

$$= \frac{K}{\epsilon_0} - \frac{KR^2}{\epsilon_0 d^2} + \dots$$

Résolution du
premier repère
sphérique R

Résolution du
deuxième repère
sphérique Φ

$$= \frac{K}{\epsilon_0} - \frac{KR^2}{\epsilon_0 d^2} + \frac{1}{R \sin \Phi} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\sin \Phi \left(\frac{K\Phi}{3\epsilon_0} - \frac{K\Phi^3}{5\epsilon_0 d^2} \right) \right) + \dots$$

$$= \frac{K}{\epsilon_0} - \frac{KR^2}{\epsilon_0 d^2} + \frac{1}{R \sin \Phi} \left(\frac{K}{3\epsilon_0} \sin \Phi - \frac{K\Phi}{3\epsilon_0} \cos \Phi - \frac{3K\Phi^2}{5\epsilon_0 d^2} \sin \Phi + \frac{K\Phi^3}{5\epsilon_0 d^2} \cos \Phi \right) + \dots$$

$$= \frac{K}{\epsilon_0} - \frac{KR^2}{\epsilon_0 d^2} + \frac{K}{3\epsilon_0 R} - \frac{K\Phi \cos \Phi}{3\epsilon_0 R \sin \Phi} - \frac{3K\Phi^2}{5\epsilon_0 d^2 R} + \frac{K\Phi^3 \cos \Phi}{5\epsilon_0 d^2 R \sin \Phi} + \dots$$

$$= \dots + \frac{1}{R \sin \Phi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{K\Theta}{3\epsilon_0} - \frac{K\Theta^3}{5\epsilon_0 d^2} \right)$$

$$= \dots + \frac{1}{R \sin \Phi} \left(\frac{K}{3\epsilon_0} - \frac{3K\Theta^2}{5\epsilon_0 d^2} \right)$$

$$= \dots + \frac{K}{3\epsilon_0 R \sin \Phi} - \frac{3K\Theta^2}{5\epsilon_0 d^2 R \sin \Phi}$$

Résolution du troisième
repère sphérique Θ

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{K}{\epsilon_0} - \frac{KR^2}{\epsilon_0 d^2} + \frac{K}{3\epsilon_0 R} - \frac{K\Phi \cos \Phi}{3\epsilon_0 R \sin \Phi} - \frac{3K\Phi^2}{5\epsilon_0 d^2 R} + \frac{K\Phi^3 \cos \Phi}{5\epsilon_0 d^2 R \sin \Phi} + \frac{K}{3\epsilon_0 R \sin \Phi} - \frac{3K\Theta^2}{5\epsilon_0 d^2 R \sin \Phi}$$

$$\rho = K - \frac{KR^2}{d^2} + \frac{K}{3R} - \frac{K\Phi \cos \Phi}{3R \sin \Phi} - \frac{3K\Phi^2}{5d^2 R} + \frac{K\Phi^3 \cos \Phi}{5d^2 R \sin \Phi} + \frac{K}{3R \sin \Phi} - \frac{3K\Theta^2}{5d^2 R \sin \Phi}.$$

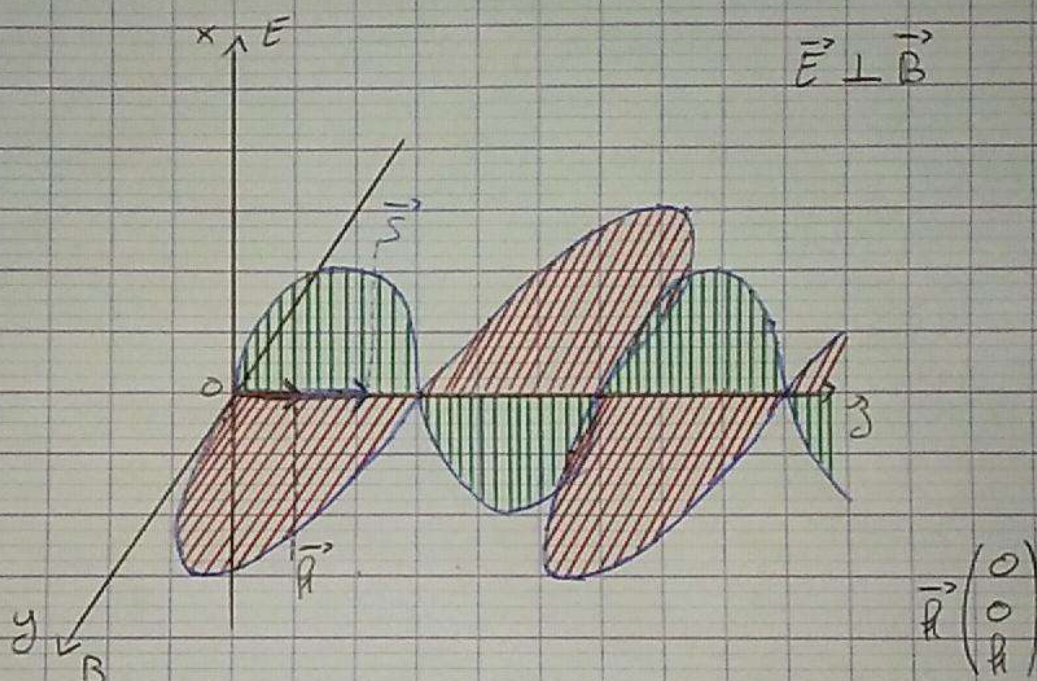
(14)

Exercice 8 :

1.

Il est évident que la densité de puissance de l'onde se propage dans la même direction que l'onde. $\vec{S}$ a donc le même sens de propagation que l'onde (ici le laser).

Donc $\vec{S}$ se propage selon l'axe Oz .



2.

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Propagation sur Oz et $\vec{E} \perp \vec{B}$.

$(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_z)$ trièdre direct $\Rightarrow \vec{E} \wedge \vec{B} = EB \vec{e}_z$.

Donc $\vec{S} = \frac{EB}{\mu_0} \vec{e}_z$.

Or, $B = \frac{E}{c}$ donc $\vec{S} = \frac{E^2}{c\mu_0} \vec{e}_z$.

Or, $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ donc $\vec{S} = \epsilon_0 c E^2 \vec{e}_z$.

(45)

3.

$$\begin{aligned}
 P_{\text{moy}} &= S_0 \cos^2(A_3 - \omega t) \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= S_0 \cos^2(A_3 - \omega t) \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} \\
 &= E_0 c E_0^2 \cos^2(A_3 - \omega t) \frac{R^2}{2} 2\pi \\
 &= E_0 c E_0^2 \cos^2(A_3 - \omega t) \pi R^2.
 \end{aligned}$$

Or, $\mu_0 E_0 = \frac{1}{c^2}$ donc $E_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$.

De ce fait, $P_{\text{moy}} = \frac{1}{\mu_0 c^2} c E_0^2 \cos^2(A_3 - \omega t) \pi R^2$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(A_3 - \omega t) \pi R^2$$

On a $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$, $R = 4 \text{ mm}$, et $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$P_{\text{moy}} = \frac{S_0}{2} \pi R^2 = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} \pi R^2.$$

Or, $B_0 = \frac{E_0}{c}$.

$$\text{Donc } P_{\text{moy}} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} \pi R^2 = \frac{(10^7)^2 \pi \cdot 4^2 \cdot (10^{-3})^2}{2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}$$

$$= \frac{16\pi \cdot 10^8}{24\pi \cdot 10^{-1}}$$

$$= \frac{16 \cdot 10^7}{24}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 10^7 \quad \checkmark$$

$$(\approx 0,67 \cdot 10^7 \text{ mW})$$

(16)

Exercice 9.

1.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A \cos(45^\circ) \\ 0 \\ A \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \\ A \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A/\sqrt{2} \\ 0 \\ A/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{5} \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$= \frac{5}{10^7}$$

$$= 5 \cdot 10^{-7} \text{ m.}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} = \frac{3}{5} \cdot 10^{15} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz.}$$

$$\omega = 2\pi f = 12\pi \cdot 10^{14} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2.

$$\vec{E}(x, y, z) = E_0 \cos(k_x x + k_y z - \omega t)$$

$$= E_0 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{5} \pi \cdot 10^7 \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{5} \pi \cdot 10^7 \cdot z - t(12\pi \cdot 10^{14})\right)$$

$$= E_0 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{5} \pi \cdot 10^7 (x+z) - 12t\pi \cdot 10^{14}\right).$$

3.

$$\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}_0 e^{i(k_x x + k_y z - \omega t)} = \vec{B}_0 e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{5} \pi \cdot 10^7 (x+z) - 12t\pi \cdot 10^{14}\right)}$$

 $\vec{S}$

(17)

Exercice 10 :

1.

$$\vec{A} \begin{pmatrix} A_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{E} = E_0 \cos(k_x x - \omega t) \vec{e}_y.$$

$$\omega = 2\pi f \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi \cdot 10^{14}}{2\pi} = 10^{14} \text{ Hz}.$$

2.

Troisième équation de Maxwell : $\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.Or, en notation complexe, $\vec{\nabla} = i\vec{k}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$.

On a donc :

$$\begin{aligned} i\vec{k} \wedge \vec{E} &= i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E}) \\ &= \frac{1}{\omega} \vec{k} E \\ &= \frac{k}{\omega} E_0 \cos(k_x x - \omega t) \\ &= \frac{1}{c} E_0 \cos(k_x x - \omega t). \end{aligned}$$

$$B_0 = \frac{1}{c} E_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{10^2}{3 \cdot 10^8} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \text{ Tesla} \quad (\approx 0,33 \cdot 10^{-6} \text{ T}).$$

3.

$$\begin{aligned} P_{\text{ray}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} S \cdot R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = S_0 \cos^2(kR - \omega t) R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \\ &= S_0 \cos^2(kR - \omega t) R^2 [\varphi]_0^{2\pi} [-\cos \theta]_0^{\pi} \\ &= S_0 \cos^2(kR - \omega t) R^2 \cdot 4\pi \\ &= 4\pi R^2 S_0 \cos^2(kR - \omega t). \end{aligned}$$

(18)

Exercice 11 :

1.

Polarisation selon Oy : $\vec{E} = E_0 \cos(k_x R - \omega t) \vec{e}_y$.

$$\vec{B} = B_0 \cos(k_x x - \omega t) \vec{e}_z.$$

Or, $B_0 = \frac{E_0}{c}$ car il s'agit d'une OETPPS.

$$\text{Donc } \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(k_x x - \omega t) \vec{e}_z.$$

$$\text{À la distance } x = R : \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(k_x R - \omega t) \vec{e}_z.$$

2.

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Propagation sur Ox et $\vec{E} \perp \vec{B}$.

$$(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_x) \text{ trièdre direct} \Rightarrow \vec{E} \wedge \vec{B} = EB \vec{e}_x.$$

$$\text{Donc } \vec{S} = \frac{EB}{\mu_0} \vec{e}_x = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2(k_x R - \omega t) \vec{e}_x$$

$$\text{avec } S_0 = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{10^6}{12\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{1}{12\pi} \cdot 10^5 \quad (\approx 2652,6)$$

3.

$$\begin{aligned} P_{\text{ray}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_0 \cos^2(kR - \omega t) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= S_0 \cos^2(kR - \omega t) R^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \\ &= S_0 \cos^2(kR - \omega t) R^2 \cdot 4\pi \\ &= \underbrace{4\pi R^2 S_0}_{\text{amplitude donc puissance max}} \cos^2(kR - \omega t). \end{aligned}$$

Valeur moyenne de $\langle \cos^2(f(t)) \rangle = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } P_{\text{moy}} &= \frac{1}{2} (4\pi R^2 S_0) = 2\pi R^2 S_0 \\ &= \frac{2\pi R^2 E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{2\pi \cdot 10^8 \cdot 10^6}{12\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{1}{6} \cdot 10^{13} \text{ W} \end{aligned}$$

$$(\approx 1,67 \cdot 10^{12} \text{ W}).$$

Exercice 12 :

2.

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{b}\right) \cos(ky - \omega t) \vec{e}_y$$

L'onde se propage sur $\vec{Oy}$ et $\vec{E}$ est portée par $\vec{Oz}$.

Equation d'Alembert $\Leftrightarrow$ milieu vide donc air = vide.

Equation d'Alembert pour un champ $\vec{E} = \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$
 ou $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

On calcule le Laplacien : $\Delta \vec{E} = \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta E_y \end{pmatrix}$ car $\vec{E}$ n'a qu'une composante E_y .

On dérive : $\Delta E_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (-k \sin(ky - \omega t)) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\pi}{b} \cos\left(\frac{\pi}{b} z\right) \right)$

On re-dérive : $\Delta E_y = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{b} z\right) - k^2 \cos(ky - \omega t)$

Soit $\Delta E_y = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 E_y - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 E_y - k^2 E_y$.

$\Delta \vec{E} = \left(-\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2\right] \right) \vec{E}$ car $E_y \vec{e}_y = \vec{E}$.

Par ailleurs, $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$ car $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (-i\omega)(-i\omega) = -\omega^2$.

Donc $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \Leftrightarrow -\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2\right] \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \left(-\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2\right] + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{E} = \vec{0}$.

Or, $\vec{E} \neq \vec{0}$ donc $\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

(20)

1.

a)

k n'a qu'une seule composante qui est k_y , la propagation s'effectue donc vers les $y > 0$.

b)

L'onde est plane car de la forme $E_0 \cos(k_y y - \omega t) \vec{e}_z$.

3.

a)

L'onde peut se propager dans la grille que si $k > 0$.

$$\text{Donc } k^2 > \frac{\omega^2}{c^2} - \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right] \quad \Leftrightarrow \quad k > \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]}$$
$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} > \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2$$

$k^2 > 0$ implique une pulsation ω élevée et supérieure à c .

b)

Fréquence de coupure $\rightarrow$ lorsque k est nul.

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_c^2}{c^2} = \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2$$
$$\Leftrightarrow \omega_c = c \sqrt{\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2}$$
$$\Leftrightarrow f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2}$$

Section carrée donc $a = b = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$.

Donc :

$$f_c = \frac{3 \cdot 10^8}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\pi}{10^{-2}} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{10^{-2}} \right)^2} = 2,12 \cdot 10^{12} \text{ Hz}.$$