EFREI-ESIGETEL
20115/2016

TAI de propagation électromagnétique
L_2 - PL_2

Exercice 1

Soient les vecteurs champs électromagnétiques d'une OPPS qui se propage dans l'air :

$$\vec{E}(y,t) = E_0 \cos(k.y - \omega.t)\vec{e}_z \text{ et } \vec{B}(x,t) = B_0 \cos(k.y - \omega.t)\vec{e}_x .$$

k, ω, E_0 et B_0 sont des constantes positives.

1- **Partie cours** : a) Ecrire les équations de Maxwell dans le milieu air.
b) Récrire ces équations en notation complexe.

2- Montrer que les vecteurs donnés ci-dessus vérifient les 4 équations de Maxwell dans le milieu air. (Utiliser les équations établies dans la question 1a)

Exercice 2

On considère un champ électrique sinusoïdal d'expression $\vec{E}(x,t) = E_0.\cos(k.x - \omega.t).\vec{e}_z$

(k, E_0 et ω sont des constantes).On donne : $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7} S.I$, $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36.\pi} S.I$

1- Calculer $\Delta\vec{E}$ et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

2- Le champ électrique donné plus haut vérifie l'équation différentielle de propagation :

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 .$$ Où μ_0 et ε_0 sont des constantes.

a) En déduire une relation entre le nombre d'onde k et la pulsation ω.

b) Utiliser les équations aux dimensions pour trouver à quelle grandeur physique est homogène la constante: $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$. Calculer cette grandeur.

3- Utiliser une des équations de Maxwell en notation complexe pour exprimer les composantes du vecteur champ magnétique.

Exercice 3

1- Utiliser les équations de Maxwell pour retrouver l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu matériel quelconque donnée par :

$$\Delta\vec{E} - \mu.\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{grad}(\rho) + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

On donne : $\Delta\vec{U} = \vec{grad}(div(\vec{U})) - \vec{rot}(\vec{rot}(\vec{U}))$ pour un vecteur $\vec{U}$ quelconque.

2- Réécrire cette équation dans le milieu air (ou vide), donner la signification de la constante $\mu_0.\varepsilon_0$. En déduire la célérité dans le milieu vide (ou air) des ondes électromagnétique.

3- Le champ électrique d'expression $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(k.x - \omega.t)\vec{e}_z$ est solution de l'équation obtenue dans la question 2, en déduire une relation entre k, ω et c.

Exercice 4

Le champ électrique d'une onde radio, considérée comme O. P.P.S, qui se propage dans l'air avec une vitesse $c = 3.10^8 m/s$ est :

$$\vec{E}(y,z,t) = (10^2 \vec{e}_y - \sqrt{3}.10^2 \vec{e}_z).\cos(\pi \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z) - \omega.t)$$

1- Donner les composantes du vecteur $\vec{E}_0$, ainsi que les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$, en déduire la valeur de l'amplitude E_0 et celle de la norme du vecteur d'onde $\vec{k}$.

2- Calculer la longueur d'onde λ, la pulsation ω, la période T, ainsi que la fréquence f de l'onde.

3- Utiliser une des équations de Maxwell en notation complexe pour calculer les composantes du Champ magnétique $\vec{B}$. Représenter ce vecteur dans le trièdre (Oxyz) et calculer son amplitude B_0.

Exercice 5

Une O.E.M.P.P.S lumineuse se propage dans l'air avec une vitesse c = 3.10^8m/s et dans une direction tel que le vecteur d'onde $\vec{k}$ a pour composantes : $(k_x = k.\sqrt{3}/2, k_y = 0, k_z = k.1/2)$.

1- a) Calculer la longueur d'onde λ sachant que k = $2.\pi.10^7$rd/m.
b) Donner la direction de propagation de l'onde, justifier votre réponse.

2- Ecrire le vecteur champ électrique sachant que ce vecteur est porté par l'axe (Oy) (vers les y > 0). On donne $E_0 = 10^7 V/m$

3- En déduire les composantes du vecteur champ magnétique par le calcul en utilisant la notation complexe.

Exercice 6

Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique d'axe (Oz) et de rayon R. Ce faisceau est composé d'une OPPS monochromatique, de longueur d'onde λ = 632, 8nm.
On donne : $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$S.I, c = $3.10^8 ms^{-1}$ et R = 1mm.

1- Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{S}$, en utilisant les propriétés d'ondes planes dans l'air.

2- Retrouver l'expression de la puissance de rayonnement. En déduire la puissance moyenne en fonction R, $E_{0.}$ μ_0 et c.

3- Calculer les amplitudes E_0 du champ électrique et B_0 du champ magnétique, sachant que la puissance moyenne du laser est de 1mW.

Exercice 7

1- Retrouver la deuxième équation de Maxwell donnée par : $div(\vec{B}) = 0$

2- Retrouver la première équation de Maxwell donnée par : $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$

3- Utiliser cette dernière équation pour établir la densité volumique de charges ρ d'une distribution sphérique qui crée un champ électrique d'expression :

$$E_r(r) = \frac{K}{\varepsilon_0}(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2})$$; Où K et ε_0 sont des constantes.

On donne :

- Théorème de Green-Ostrogradski : $\oiint_S \vec{U}.d\vec{S} = \iiint_\tau div(\vec{U})d\tau$
- Divergence en coordonnées sphériques :

$$div(\vec{E}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.E_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}$$

Exercice 8

Un faisceau laser de rayon R, d'axe Oz, composé d'O.E.M.P.P.S, tel que l'amplitude du champ électrique est $E_0 = 10^7$ V/m

1- Représenter le vecteur de Poynting $\vec{S}$, le vecteur d'onde $\vec{k}$ ainsi que le plan dans lequel se trouve le couple champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$. Justifier votre réponse.

2- Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{S}$. (Utiliser les propriétés d'ondes planes).

3- Exprimer la puissance moyenne de rayonnement du faisceau, en fonction de R, E_0, μ_0 et c. Faire le calcul pour $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ S.I$, R = 4mm et c = 3.10^8m/s.

Exercice 9

Une onde électromagnétique lumineuse (supposée plane, progressive et sinusoïdale) se propage dans l'air suivant une droite (D) du plan (xoz) qui fait un angle α = 45° avec l'axe $O\vec{x}$.

1- Donner les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de k. Calculer la longueur d'onde λ, la pulsation ω et la fréquence f de l'onde, sachant que $k = \frac{2\pi}{5}.10^7\ rd.m^{-1}$.

2- Ecrire le vecteur champ électrique sachant que ce vecteur est sur l'axe (Oy) vers les y > 0.

3- En déduire les composantes du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ en utilisant la notation complexe, en déduire celles du vecteur de Poynting $\vec{S}$.

Exercice 10

1- Ecrire le champ électrique d'une O.P.P.S, d'amplitude E_0, de pulsation ω, qui se propage dans l'air, selon l'axe $O\vec{x}$ et qui est dirigé suivant l'axe (Oz) vers les z > 0. Calculer sa fréquence pour $\omega = 2\pi.10^{14} rad/s$.

2- Utiliser la 3ième équation de maxwell, en notation complexe, pour exprimer les composantes du champ magnétiques. Calculer B_0, sachant que $E_0 = 10^2 V/m$ et c = 3.10^8m/s.

3- Exprimer la puissance de rayonnement à la distance R de la source, sachant **que celle-ci émet dans toutes les directions, et est très proche de la terre.**

Exercice 11

On considère une source d'onde radio, placée au point O, **loin de la terre et qui émet dans toutes les directions**. L'onde est supposée plane, progressive et sinusoïdale. Le champ électrique est d'amplitude $E_0 = 10^3 V/m$ et de pulsation ω.

1- Ecrire l'expression du champ électrique à la distance x = R du centre O, sachant que la propagation est selon l'axe radial $O\vec{x}$ et le champ électrique est sur l'axe (Oy) vers les y > 0. En déduire l'expression du champ magnétique, en utilisant les propriétés des ondes planes.

2- Donner l'expression du vecteur de Poynting à la distance R, exprimer l'amplitude S_0 en fonction de E_0, μ_0 et c. Calculer S_0.

3- Exprimer la puissance de rayonnement à la distance R, en déduire la puissance moyenne en fonction de R, E_0 μ_0 et c. Faire le calcul pour R=10km, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} S.I$ et c = 3.10^8m/s.

Exercice 12 Guide d'ondes métallique

Une onde se propage dans un guide d'onde métallique de section carrée de côté. Le milieu du guide est l'air et la vitesse de propagation est c = 3.10^8m/s. Le champ électrique de l'onde s'écrit :

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi.x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi.z}{b}\right)\cos(k.y - \omega.t)\,\vec{e}_z$$

1- a) Donner les composantes du vecteur $\vec{k}$, en déduire la direction de propagation.
b) L'onde est-elle plane ? Justifier votre réponse.

2- Utiliser l'équation de d'Alembert pour montrer la relation :

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

3- a) Donner la condition vérifiée par la pulsation ω dans le cas d'une propagation qui correspond à $k^2 > 0$.
b) En déduire la fréquence de coupure f_c. Faire le calcul pour a = 1cm.