

TAI Propagation Electromagnétique

Exercice 1

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}))$$

Donc,

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On utilise les équations 1 et 3 de Maxwell pour transformer le div et le rot ce qui donne :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right) - \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right) - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Nous avons constaté que $-\text{rot}(-x) = \text{rot } x$ donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Nous sortons ensuite la constante du gradient :

$$\frac{1}{\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) + \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

- Précisons ensuite que d'après la 4^e équation de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu \cdot \vec{J} + \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Par conséquent :

$$\mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) - \mu \cdot \vec{J}$$

- On applique :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \rightarrow \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) - \mu \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) + \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) - \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) + \mu \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

Au final : (CQFD)

$$\frac{1}{\varepsilon} \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

2. Dans le vide $\mu = \mu_0$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$

Donc :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Par conséquent :

$$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$$

Exercice 2 :

1. Amplitude de E = Valeur max de E0

$$A = \vec{E}_0 \cos\left(\frac{\pi}{3} (2\sqrt{3}x + 2y) \cdot 10^7 - \omega \cdot t\right)$$

Direction de propagation :

(x o y) car :

- $\vec{E}$ dépend de x et y
- $\vec{k} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Composantes vecteur d'onde $\vec{k}$ (Par identification) :

$$kx = 2\sqrt{3} \text{ et } ky = 2$$

$$\vec{k} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4 \text{ rad/m}$$

Calcul de λ ($\pi/3(10)^7$ ajustable) :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$$

Calcul de T (ajustable) :

$$T = \frac{\lambda}{c} \rightarrow T = \frac{\pi/2}{c} = \frac{\pi}{6 \cdot 10^8} \text{ s}$$

Calcul de ω :

$$\omega = 2\pi f \text{ et } f = 1/T \rightarrow$$

$$\omega = 2\pi * \frac{1}{T} = \frac{2\pi c}{\frac{\pi}{2}}$$

3. Utilisation de la 4^e propriété des ondes planes :

Or (E, B, k) est un trièdre direct (avec les flèches).

Par conséquent :

Ondes planes Sinusoïdales : $\vec{E}_0 = \vec{C}_0 \cdot \vec{B}_0$

Exercice 3 :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_z \quad (k, E_0, \omega \text{ constantes})$$

1. Laplacien $\Delta \vec{E}$ en fonction de k et $\vec{E}$

$$\Delta \vec{E} = \begin{pmatrix} \Delta \vec{E}_x \\ \Delta \vec{E}_y \\ \Delta \vec{E}_z \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{-k \cdot E_0 \sin(kx - \omega t)}{\partial x} = -k \cdot E_0 \sin(kx - \omega t)$$

- 2.

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(kx - \omega t)$$

3. D'après l'équation d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Or,

$$-k^2 E(x, t) + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 E(x, t) = 0$$

Ce qui implique :

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\mu_0 \epsilon_0}$$

Donc,

$$\omega = \sqrt{\frac{k^2}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Exercice 4 :

1. Direction de propagation (YoZ) car :

- $\vec{E}$ dépend de x et y
- $\vec{k} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos(k \frac{\sqrt{2}}{2} (y+z) - \omega t) \end{pmatrix} = \frac{E_0 \cos(k \frac{\sqrt{2}}{2} (y+z) - \omega t)}{\frac{\partial y}{\partial y}} = 0$$

Ceci confirme la 1ere équation de Maxwell : $\text{div}(\vec{E}) = 0$

2. Il y a 4 propriétés :

- $\vec{E}$ et $\vec{B}$ transverses
- $\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$
- $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires
- Mais surtout, $(\vec{E}, \vec{B} \text{ et } \vec{u})$ composent un trièdre direct.

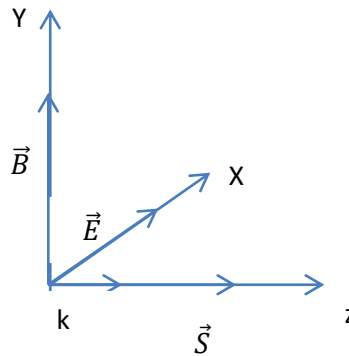
Donc, $\begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$3. \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{E}) = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

$$\rightarrow i \vec{k} \wedge \vec{E}_0 = -(-i\omega) \vec{B} \rightarrow \vec{k} \wedge \vec{E}_0 = \omega \vec{B} \rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_0}{\omega}$$

Exercice 5 :

1)



$(\vec{E}, \vec{B})$ dans le plan (yOx)

Propriété onde, $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ trièdre direct

2) Par définition $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu}$

-> OPPS dans air ou vide $\mu = \mu_0$

-> $\vec{E} \perp \vec{B}$ $\vec{E} \wedge \vec{B} = E \cdot B \cdot \vec{u}$ car OPPS

$$\vec{S} = \frac{E \cdot B}{\mu_0} \vec{u} =$$

3) $P = \oint \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} = \Phi(\vec{S})$

$$= \vec{S} \cdot \int d\vec{\Sigma}$$

$$= S \cdot \Sigma$$

$$= S \cdot \pi R^2$$

$$= \frac{E \cdot B}{\mu_0} \pi R^2$$

$$\text{or } E = cB \rightarrow B = \frac{E}{c}$$

$$\frac{E \cdot B}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0} = \frac{E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)}{c\mu_0}$$

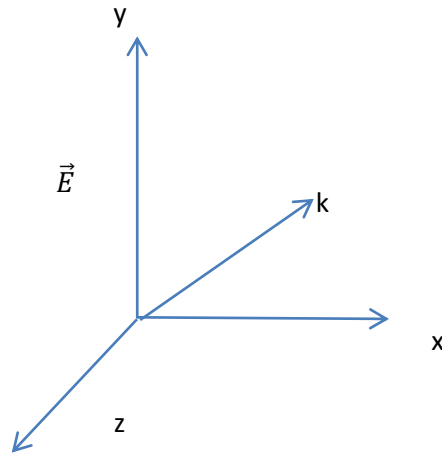
$$P_{\text{moy}} = \langle P \rangle = \left\langle \frac{E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \pi R^2}{c\mu_0} \right\rangle_t = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle_t \pi R^2$$

$$P_{\text{moy}} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} \pi R^2$$

$$\text{A.N : } P_{\text{moy}} = \dots = 1.7 \times 10^8 \text{ W}$$

Exercice 6

1.



($k_{ox} = 30^\circ$)

2. $\vec{E}(x, y, t) = E_0(k_x x + k_y y - \omega t) \vec{e}_z$

3. $k = \begin{pmatrix} k \cos(30^\circ) \\ k \sin(30^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{2} k \\ \frac{k}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

D'après la 3^e équation de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

Notation complexe :

$$\vec{\nabla} = i\vec{k} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$$

On a :

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{k\sqrt{3}}{2} \\ k \\ \frac{k}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos(\frac{k\sqrt{3}}{2}x + \frac{k}{2}y - \omega t) \end{pmatrix} 1/\omega \\ &= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \frac{k}{2} \cos(\frac{k\sqrt{3}}{2}x + \frac{k}{2}y - \omega t) \\ -\frac{k\sqrt{3}}{2} \cos(\frac{k\sqrt{3}}{2}x + \frac{k}{2}y - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{B}(x, y, t) = \vec{B}_0(k_x x + k_y y - \omega t)$$

Par conséquent, d'après la propriété OPPS :

$$E_0 = c B_0$$

Donc,

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{\omega E_0}{k} \quad \text{puisque} \quad \frac{\omega}{k} = c$$

Exercice 7 :

1)

a)

$$\left. \begin{array}{l} \text{pas de déphasage (cos/cos)} \\ \text{polarisation à } \alpha : \frac{E_{01} \sin \alpha}{E_{01} \cos \alpha} = \tan \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rectiligne}$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} \text{déphasées de } -\frac{\pi}{2} (\cos/\sin) \\ E_{02} \neq E_{03} = E_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{circulaire}$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} \text{déphasés de } +\frac{\pi}{2} (\cos/-\sin) \\ E_{03} \neq E_{02} = E_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{circulaire}$$

2)

$$\vec{E} = \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \begin{pmatrix} (E_{02} + E_{03}) \cos(k.z - \omega.t) \\ (E_{02} - E_{03}) \sin(k.z - \omega.t) \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{déphasées de } -\pi/2 (\cos/\sin) \\ E_{02} + E_{03} \neq E_{02} - E_{03} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{élliptique (droit)}$$

Si $E_{02} = E_{03} = E_0$:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 2E_0 \cos(k.z - \omega.t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{l'onde devient polarisée selon Oz}$$

Exercice 8 :

1)

$$\vec{E}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ E_{01} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(kx - \omega t) \\ E_{01} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(kx - \omega t) \end{pmatrix}$$

Ox axe de propagation donc pas de composantes

2)

$$\vec{E}_2 \begin{pmatrix} E_{02} \cos(k.z - \omega.t) \\ 0 \\ 3E_{02} \cos\left(k.z - \omega.t + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \leftarrow \text{axe de propagation}$$

Déphasage de $\frac{\pi}{2}$ et grand axe sur z 3 fois plus grand que petit axe

3)

$$\vec{E}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ E_{03} \cos\left(\frac{k\sqrt{2}}{2}x + \frac{k\sqrt{2}}{2}y - \omega t\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les composantes en x et en y sont nulles car elles correspondent à l'axe de propagation

Exercice 9 :

- Déphasage $\cos/\sin \Leftrightarrow \pi/2$ (1)
- Comme $E_{0x} > E_{0y}$ on en déduit que E_{0x} est le grand axe et E_{0y} est le petit.
- Equation : $\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = \frac{E_{0x}^2 \cos^2(k.z - \omega.t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_{0y}^2 \sin^2(k.z - \omega.t)}{E_{0y}^2} = 1$ (2)
- (1) et (2) $\Rightarrow$ vibration elliptique droite

$$\left. \begin{aligned} &\Leftrightarrow E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \\ &\frac{\cos}{\sin} \Leftrightarrow -\pi/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Circulaire droit}$$

Donc cercle d'axe Ox et Oy

Exercice 10 :

1)

- Propagation sur $\vec{O}_x \Rightarrow \vec{k} \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Polarisation rectiligne sur $\vec{O}_z \Rightarrow \vec{E} = E \cdot \vec{e}_z$

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_z$$

$$\text{On a } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ et } f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\text{A.N : } f = 10^4 \text{ Hz.}$$

2)

3^{ème} équation de Maxwell : $\overrightarrow{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\text{avec } \begin{cases} \overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \\ \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \\ \vec{\nabla} = i\vec{k} \end{cases}$$

$$i\vec{k} \wedge \vec{E} = -(-i\omega \vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E}) \quad \vec{E} \text{ est selon } \vec{O}_z$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ -k_x E \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

Calcul de B_0 :

$E_0 = c B_0$ (prop. d'onde plane dans l'air)

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

$$\text{A.N : } B_0 = \frac{10^2}{3.10^8} = \frac{1}{3.10^6} = 3.10^{-6} \text{ Tesla.}$$

3) Composantes de $\vec{S}$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} -EB_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} k_x E^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

Calcul de S_0 : $S_0 = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}$

A.N : $S_0 = \frac{10^2 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{4\pi 10^{-7}} \sim \frac{1}{4} \cdot 10^3 W/m^2$

$$S_0 \sim 0,25 \cdot 10^3 W/m^2$$

4. $P_{ui} = \oint \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint S \cdot R \Sigma \cos(0)$

$= S \oint R \Sigma = S \Sigma = S 4\pi R^2$

$$P_{ui} = S_0 \cos^2(k_x x + k_y y - \omega t) \cdot 4\pi R^2$$

Exercice 11 :

1)

- Propagation sur $\vec{O_z} \Rightarrow \vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$
- Polarisation rectiligne sur $\vec{O_y} \Rightarrow \vec{E} = E \cdot \vec{e_y}$
- $\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{e_y}$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E})$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{E} \text{ est selon } Oy$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -k_z E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } E = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

2) Composantes du vecteur de Poynting $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -EB_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_z E^2 \end{pmatrix} \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$$

3.

Exercice 12 :

1)

- Propagation sur $\vec{Ox} \Rightarrow \vec{k} \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Polarisation rectiligne sur $\vec{Oy} \Rightarrow \vec{E} = E \cdot \vec{e}_y$
- $\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y$

Expression de $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E})$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{E} \text{ est selon } Oy$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_x E \end{pmatrix} \text{ avec } E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

3) Composantes du vecteur de Poynting $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} EB_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} k_x E^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

4) Expression de S_0 :

$$S_0 = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \text{ et } B_0 = \frac{E_0}{c} \text{ d'où } S_0 = \frac{\frac{E_0^2}{c}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}$$

5) Puissance moyenne

$$P_{\text{moy}} = \langle S_0 \rangle \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle 4\pi R^2$$

$$P_{\text{moy}} = S_0 \cdot 2\pi R$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} 2\pi R \quad (\text{A.N : } P_{\text{moy}} = \dots\dots = (1/6) \times 10^2 \text{ W})$$

