

(1)

TAI PROPAG

Exercice 1

- 1° direct° propag : $\propto$ car E dépend de x
(en revanche, E est parti par dy)
- Nombre d'ondes : $k = \frac{\pi}{3} \omega^2$
 - Longueur : $k = 2\pi/\lambda$
 - Période & fréquence : $T = \frac{1}{f}$

2° OPPS dans le vide donc :

$$B = E/c \quad \text{ne marche qu'en module}$$

$$B_0 = E_0/c \quad \text{et } \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$$

3° $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu}$

$$\vec{S} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(kx - \omega t) (\underbrace{\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z}_{\vec{e}_x})$$

$$\text{d'où } \vec{S} = \begin{pmatrix} S_{0x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } S_0 = E_0^2 / c\mu_0$$

Exercice 2

10/ direction : Oy

• $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

• $\omega = kc$ (relat° de dispersion)

20/ prop onde plane indique que $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}$

d'où $\vec{E} = E_0 \cos(ky - \omega t) \vec{e}_x$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(ky - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $E_0 = B_0 \times c$

30/ $\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0^2}{2\mu_0} \cos^2(ky - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

S_0

Exercice 3

10/ $\Delta \vec{E} = \vec{\nabla}^2 \vec{E} = (i\vec{k} \cdot i\vec{k}) \vec{E} = -k^2 \vec{E}$

20/ $\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = (-i\omega)(-i\omega) \vec{E} = -\omega^2 \vec{E}$

30/ Méthode 1 : utiliser la formalisme complexe

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = \vec{0}$$

$$\text{ssi } -k^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2 \vec{E}) = \vec{0}$$

$$\text{ssi } \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{ssi } k = \frac{\omega}{c}$$

Méthode 2

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = \vec{0}$$

Gr $\Delta \vec{E} = \frac{d^2 E_z}{dy^2}$ car $\vec{E}$ dépend de y selon $\vec{e}_z$

Gr $\vec{E}(y, t) = E_0 \cos(ky - \omega t) \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \frac{d^2 E_z}{dy^2} = -k^2 E_0 \cos(ky - \omega t) = -k^2 E_z(y, t)$$

$$\text{et } \frac{d^2 E_z}{dt^2} = -\omega^2 E_z(y, t)$$

$$\text{d'où } -k^2 E_z(y, t) = -\frac{\omega^2}{c^2} E_z(y, t) \quad \text{d'où } k = \frac{\omega}{c}$$

Exercice 4

10/ Méthode 1 : formalisme complexe

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = i \vec{k} \cdot \vec{E} \\ &\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0\end{aligned}$$

Méthode 2

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad \text{car dépend de } x$$

$$= \left[E_0 (\cos kx - \omega t) \right]_{/y}$$

$$= \vec{k} \cdot E_0 \sin(kx - \omega t) \vec{e}_y$$

$$= \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Commentaire : Maxwell : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ densité de charge volumique

forcément nulle car on est dans le vide.

On confirme donc

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

9

20/ $\vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_z$ car $\vec{B}$ et $\vec{E}$ transverses

30/ Méthode 1: formalisme complexe

$$\omega \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\text{soit } \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\text{avec } \vec{\nabla} = i\vec{k} \text{ et } \frac{d}{dt} = -i\omega$$

$$\text{d'où } \vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E})$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ kE \end{pmatrix} = \frac{kE}{\omega} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \vec{e}_z$$

Coefficient de kE/ω

Rappel pour calcul en composantes vectorielles

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Méthode 2 only for geom.

Maxwell dit que $\vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$

soit $\begin{pmatrix} d/dx \\ d/dy \\ d/dz \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{dE_y}{dx} \end{pmatrix} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$

car E dépend de x selon y

On a alors $\frac{dB_z}{dt} = - \frac{dE_y}{dx} = -k E_0 \sin(kx - \omega t)$

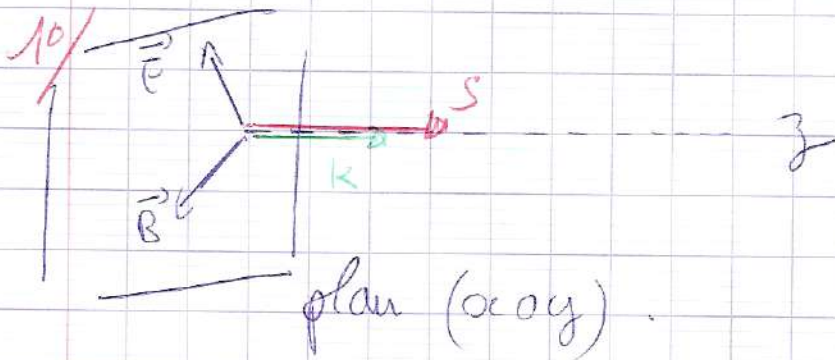
d'où par intégration selon t

$$B_z = \left(\frac{k E_0}{\omega} \right) \cos(kx - \omega t) + K$$

$= 0$ car absence de champ statique

On a ainsi $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$

Exercice 5



$\vec{S}$ et $\vec{E}$ colinéaires à Oz .

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ transverses à Oz donc forcément dans le plan Oxy mais on ne sait pas pour autant à quel axe faut-il les associer.

20/

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} \vec{e}_z = \frac{1}{c\mu_0} E^2 \vec{e}_z$$

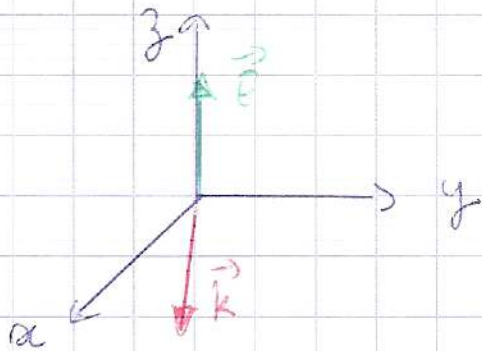
30/

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \left\langle \iint S \cdot d\vec{\Sigma} \right\rangle = \langle S \rangle \underbrace{\left(\sum_{\text{surface}} \right)}_{\text{cercle}} \\ &= \frac{E_0^2}{c\mu_0} \left\langle \cos^2(kz - \omega t) \right\rangle \underbrace{(\pi R^2)}_{\text{surface}} \\ &= \frac{1}{2} \cos \cos^2 \text{ périodique entre } 0 \text{ et } 1 \end{aligned}$$

$$\langle P \rangle = \frac{\pi R^2}{2c\mu_0} E_0^2$$

Exercice 6

10/ OPDS, trièdre direct $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$



20/ $\vec{E}(x, y, t) = E_0 \cos(k_x x + k_y y - \omega t) \vec{e}_z$

30/ $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$[\dots] \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k_y E \\ -k_x E \\ 0 \end{pmatrix}$$

à finir ?

$$\text{et } B_0 = \frac{k E_0}{\omega}$$

(3)

Exercice 10

10/ • $\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_z$

• $\omega = 2\pi f$

20/ $\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$

$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ -kE \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B} = B_0 \vec{e}_y$

et $B_0 = + \frac{k}{\omega} E_0$

30/ $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ pas μ_0 car on est dans l'air

$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} EB \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $S_0 = \frac{E_0 B_0}{\mu} = \frac{E_0^2}{c\mu}$

Exercice 11

10/ $\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{e}_y$

$\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -kE \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{k}{\omega} E \vec{e}_x$
 $= -B_0 \vec{e}_x$

$$20/ \quad \vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_B \end{pmatrix}$$

$$30/ \quad \langle P \rangle = \langle S \rangle a^2 \\ = \frac{\epsilon_0 \beta a^2}{2 \mu_0 c}$$

Exercice 12

$$10/ \quad \vec{E}(R, t) = E_0 \cos(k \vec{OR} - \omega t) \vec{e}_y$$

$$\text{d'où } \vec{B}(R, t) = B_0 \cos(kR - \omega t) \vec{e}_z$$

$$20/ \quad \vec{S} = \frac{E_0^2}{c \mu_0} \cos^2(kR - \omega t) \vec{e}_z$$

$$S_0 = E_0^2 / c \mu_0$$

$$30/ \quad \langle P \rangle = \frac{E_0^2 4\pi R^2}{2c \mu_0}$$

Exercice 7

10/

(a) Propage rectiligne telle que l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ décrit la droite faisant un angle α avec l'axe de $\vec{z}$ tel que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow$ suivant $\vec{u} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$

(b)
$$\begin{pmatrix} E \cos(kz - \omega t) \\ E \sin(kz - \omega t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} E \cos(kz - \omega t) \\ E \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

Polarisation circulaire à gauche.

(c)

à droite

90/

Forcément rectiligne : l'une va à gauche, l'autre à droite, annulation oblique.

Exercice 8

10/

Exercice 9

1°/

On a $E_{0x} \neq E_{0y}$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ E_{0y} \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ E_{0y} \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ \dots \end{pmatrix}$$

Polarisation elliptique à gauche ($0 < \varphi < \pi$)

2°/

On $E_{0x} = E_{0y}$

donc c'est circulaire gauche sur Oz selon une étq.

✓
vérif équation

$$\frac{E_{0x}^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_{0y}^2}{E_{0y}^2} = \frac{E_{0x}^2 \cos^2(kz - \omega t) + E_{0y}^2 \sin^2(kz - \omega t)}{E_{0x}^2}$$

$$\cos^2(\) + \sin^2(\) = \underline{\underline{1}}$$

$$\frac{E_{0x}^2}{E_0^2} + \frac{E_{0y}^2}{E_0^2} = 1$$

$$\frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{E_0^2} = 1$$

$$E_{0x}^2 + E_{0y}^2 = E_0^2$$

→ E_0 rayon