

ALGORITHMIQUE NUMÉRIQUE

Cahier des TDs



Nicolas Sicard

2009

TD N°1

Représentation des nombres réels en machine

Exercice 1

Convertir les nombres suivants en représentation flottante IEEE au format simple précision. Donner un résultat avec 8 chiffres significatifs.

- a) 9 b) $5/32$ c) $-5/32$ d) 6,125

Exercice 2

Convertir en décimal les nombres hexadécimaux flottants suivants, codés au format simple précision IEEE 754 :

- a) 42E48000 b) 3F880000 c) 00800000 d) C7F00000

Exercice 3

Normaliser les nombres binaires suivants, formés d'un bit de signe, d'un exposant codé excédent à 64 et d'une mantisse de 16 bits :

- a) 0 1000000 0001010100000001 b) 0 0111111 0000001111111111

Exercice 4

Expliquez pourquoi l'addition sur les nombres flottants n'est pas associative. Donner un exemple. Quelles conséquences cela a-t-il sur le calcul numérique ?

La multiplication sur les flottants est-elle associative ?

Exercice 5

Ecrire un algorithme d'addition de deux nombres en virgule flottante au format IEEE en simple précision. Chaque nombre pourra être représenté par un tableau de 32 booléens.

TD N°2

Erreurs d'affectation et d'approximation

Exercice 1

Calculer l'écart absolu E_a et l'écart relatif E_r entre les deux plus petits nombres positifs normalisés codés en simple précision IEEE 754 ? Faites les mêmes calculs pour les deux plus grands nombres.

Que peut-on dire de l'erreur relative commise lors d'un arrondi pour les très petits nombres et les très grands nombres (on suppose qu'une erreur d'arrondi conduit à l'obtention du nombre flottant immédiatement plus petit ou plus grand) ?

Exercice 2

On rappelle que l'erreur d'affectation est l'erreur commise lors du codage d'un nombre réel a dans l'ordinateur. Montrer que l'erreur d'affectation pour une mantisse de t bits est majorée par $|a - fl(a)| \leq |a| 2^{1-t}$.

Exercice 3

On souhaite résoudre l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 10^{-8}$, $b = -0,8$ et $c = 10^{-8}$. Si on programme ce calcul en C avec des flottants en simple précision (`float`) on obtient les deux solutions $x_1 = 8.000000e+07$ et $x_2 = -8.195639e-01$. En double précision (`double`), x_1 ne change pas mais $x_2 = 1.110223e-08$. Or le résultat correct devrait être $x_1 \approx 8.00e+07$ et $x_2 \approx 1.25e-08$.

Expliquez cette grossière erreur sur x_2 , en particulier en simple précision. Proposez une méthode pour obtenir un résultat plus juste (par exemple en utilisant une relation connue entre les racines x_1 et x_2).

TD N°3

Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants par la méthode de Gauss avec pivot partiel :

$$(1.1) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 10 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$(1.2) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 2

On suppose que les nombres sont arrondis au plus proche à 3 chiffres significatifs : ils peuvent s'écrire sous la forme $n = \pm 0.xyz10^e$ avec $x, y, z, e \in \mathbb{N}$. On considère le système :

$$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. Résoudre le système par la méthode de Gauss en utilisant le coefficient 10^{-4} comme pivot.
2. Refaire les calculs avec le coefficient 1 comme pivot. Conclure.

Exercice 3

On rappelle que la méthode du pivot total consiste à trouver à chaque étape la plus grande valeur A_{ij} possible (en valeur absolue) dans toute la sous-matrice d'ordre $n-k+1$ dont le premier rang est le pivot courant. On permute alors dans la matrice A et le vecteur b la ligne i avec la ligne k et la colonne j avec la colonne k . Dans ce dernier cas l'ordre des inconnues change, ce qui pose problème pour la phase de résolution (remontée).

Comment résoudre ce problème, d'un point de vue algorithmique ? Ecrire l'algorithme `GaussPTotal` de la méthode de Gauss avec pivot total.

Exercice 4

Montrer comment on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss pour inverser une matrice carrée. En utilisant `GaussPTotal` proposer un algorithme `Inversion` d'inversion de matrice.

Exercice 5

Utiliser la méthode de Jacobi pour résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

On pourra prendre le vecteur nul comme vecteur initial et on supposera que les calculs sont effectués avec arrondi sur 3 chiffres décimaux significatifs. Combien d'itérations sont nécessaires pour obtenir le résultat exact ?

Mêmes questions avec la méthode de Gauss-Seidel.

TD N°4

Interpolations polynômiales

Exercice 1

Etant donnés les points de mesure suivants :

x	0	2	3
y	7	11	28

utiliser la méthode de Lagrange pour calculer y lorsque x vaut 1.

Exercice 2

Les points de la liste suivante appartiennent à un polynôme en x.

x	-2	1	4	-1	3	-4
y	-1	2	59	4	24	-53

Déterminer le degré de ce polynôme en construisant la table des différences divisées (*divided differences*) de la méthode de Newton.

Exercice 3

En utilisant les points de mesure suivants

x	4.0	3.9	3.8	3.7
y	-0,06604	-0.02724	0.01282	0.05383

déterminer la racine de $y(x)=0$ par la méthode de Neville.