

INTERROGATIONS DE TD

IT 2010.3 : Pivot de Gauss total ✨

C) Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss total : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & -1 & 13 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & -1 & 13 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ C_1 \leftrightarrow C_2 \\ \sigma(X) = (1 \ 2) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & -1 & 13 \\ 4 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3 \left(L_2 - \frac{2}{3} L_1 \right) \\ L_3 \leftarrow 6 \left(L_3 + \frac{1}{6} L_1 \right) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \\ 0 & 7 & 11 & 43 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \sigma(X) = (1 \ 3 \ 2) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 11 & 7 & 43 \\ 0 & 5 & 1 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \leftarrow 11 \left(L_3 - \frac{5}{11} L_2 \right) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 11 & 7 & 43 \\ 0 & 0 & -24 & -270 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\sigma_3} = \frac{270}{24} = \frac{45}{4} = x_1 \\ x_{\sigma_2} = \frac{43 - 7x_{\sigma_3}}{11} = \frac{43 \times 4 - 7 \times 45}{11 \times 4} = \frac{-143}{11 \times 4} = -\frac{13}{4} = x_3 \\ x_{\sigma_1} = \frac{13 - x_{\sigma_3} + x_{\sigma_2}}{6} = \frac{13 \times 4 - 45 - 13}{6 \times 4} = -\frac{1}{4} = x_2 \end{cases}$$

C') Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss total : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 6 & -1 & 13 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right)$

Version avec la rature au tableau..

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 6 & -1 & 13 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ C_1 \leftrightarrow C_2 \\ \sigma(X) = (1 \ 2) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & -1 & 13 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3 \left(L_2 - \frac{2}{3} L_1 \right) \\ L_3 \leftarrow 6 \left(L_3 + \frac{1}{6} L_1 \right) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 11 & 43 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \sigma(X) = (1 \ 3 \ 2) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 11 & 7 & 43 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow 11\left(L_3 + \frac{1}{11}L_2\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 11 & 7 & 43 \\ 0 & 0 & 18 & -12 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\sigma_3} = \frac{-12}{18} = -\frac{2}{3} = x_1 \\ x_{\sigma_2} = \frac{43 - 7x_{\sigma_3}}{11} = \frac{43 \times 3 + 7 \times 2}{11 \times 3} = \frac{143}{11 \times 3} = 13 = x_3 \\ x_{\sigma_1} = \frac{13 - x_{\sigma_3} + x_{\sigma_2}}{6} = \frac{13 \times 3 + 2 + 13 \times 3}{6 \times 3} = \frac{40}{9} = x_2 \end{cases}$$

D) Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss total : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ C_1 \leftrightarrow C_3 \\ \sigma(X) = (1 \ 3) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 64 \\ 9 & 3 & 1 & 27 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 16\left(L_2 - \frac{9}{16}L_1\right) \\ L_3 \leftarrow 4\left(L_3 - \frac{1}{4}L_1\right) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 64 \\ 0 & 12 & 7 & -144 \\ 0 & 4 & 3 & -32 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow 3\left(L_3 - \frac{1}{3}L_2\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 64 \\ 0 & 12 & 7 & -144 \\ 0 & 0 & 2 & 48 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\sigma_3} = 24 = x_1 \\ x_{\sigma_2} = \frac{-144 - 7x_{\sigma_3}}{12} = -12 - 14 = -26 = x_2 \\ x_{\sigma_1} = \frac{64 - x_{\sigma_3} - 4x_{\sigma_2}}{16} = \frac{64 - 24 + 4 \times 26}{16} = 9 = x_3 \end{cases}$$

IT 2010.4 : Lagrange et Newton ★★

C) Etant donné l'ensemble de points suivants :

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline x_i & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ y_i & a^4-16 & a^4-1 & a^4 & a^4-1 & a^4-16 \end{array} \right)$$

a) En donner le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n y_k l_k(x) = \sum_{k=1}^n y_k \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

$$l_{-2}(x) = \frac{(x+1)(x)(x-1)(x-2)}{-1 \cdot -2 \cdot -3 \cdot -4} = \frac{x(x-2)(x^2-1)}{24}$$

$$l_{-1}(x) = \frac{(x+2)(x)(x-1)(x-2)}{1 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -3} = \frac{x(x-1)(x^2-4)}{-6}$$

$$l_0(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{2 \cdot 1 \cdot -1 \cdot -2} = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{4}$$

$$l_1(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x)(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot -1} = \frac{x(x+1)(x^2-4)}{-6}$$

$$l_2(x) = \frac{x(x+2)(x^2-1)}{24}$$

Pour éviter de perdre (beaucoup trop de) votre temps à distribuer, simplifier puis re factoriser, il s'agit de jouer à fond la carte des symétries remarquables.

$$L_{n-1}(x) = (a^4-16)(l_{-2}(x)+l_2(x)) + (a^4-1)(l_{-1}(x)+l_1(x)) + a^4 l_0(x) =$$

$$\frac{a^4-16}{24} x(x^2-1)(x-2+x+2) - \frac{a^4-1}{6} x(x^2-4)(x-1+x+1) + \frac{a^4}{4} (x^2-1)(x^2-4) =$$

$$\frac{a^4-16}{12} (x^2-1)x^2 - \frac{a^4-1}{3} (x^2-4)x^2 + \frac{a^4}{4} (x^2-1)(x^2-4) =$$

$$x^4 \left(\frac{a^4-16}{12} - \frac{a^4-1}{3} + \frac{a^4}{4} \right) + x^2 \left(-\frac{a^4-16}{12} + \frac{4(a^4-1)}{3} - \frac{5a^4}{4} \right) + a^4 =$$

$$x^4 \left(\frac{a^4-16-4a^4+4+3a^4}{12} \right) + x^2 \left(\frac{-a^4+16+16a^4-16-15a^4}{12} \right) + a^4 =$$

$$a^4 - x^4$$

b) En donner le polynôme d'interpolation de Newton

$$\begin{pmatrix} i & x_i & \nabla^0 y_i & \nabla^1 y_i & \nabla^2 y_i & \nabla^3 y_i & \nabla^4 y_i \\ 1 & -2 & a^4 - 16 & & & & \\ 2 & -1 & a^4 - 1 & 15 & & & \\ 3 & 0 & a^4 & 8 & -7 & & \\ 4 & 1 & a^4 - 1 & 5 & -5 & 2 & \\ 5 & 2 & a^4 - 16 & 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour construire le polynôme, nous utilisons la récurrence :

$$P_0(x) = a_n = \nabla^{n-1} y_n$$

$$P_k(x) = a_{n-k} + (x - x_{n-k}) P_{k-1}(x)$$

$$P_0(x) = -1$$

$$P_1(x) = 2 + (x - 1)P_0(x) = 3 - x$$

$$P_2(x) = -7 + xP_1(x) = -7 + 3x - x^2$$

$$P_3(x) = 15 + (x + 1)P_2(x) = 15 - 7x + 3x^2 - x^3 - 7 + 3x - x^2 = 8 - 4x + 2x^2 - x^3$$

$$P_4(x) = a^4 - 16 + (x + 2)P_3(x) = a^4 - 16 + 8x - 4x^2 + 2x^3 - x^4 + 16 - 8x + 4x^2 - 2x^3 = a^4 - x^4$$

c) De quelle nature est la différence entre les deux polynômes obtenus ? Justifiez votre réponse.

Cette différence est nulle, en conformité avec le théorème d'unicité.

La démonstration de ce théorème consiste est une simple démonstration par l'absurde.

Supposons qu'il existe deux polynômes, de degré inférieur ou égal à $n - 1$, interpolateurs de n points distincts : $\forall i \in \llbracket 1 \quad n \rrbracket (y_i = L_{<n}(x_i) = N_{<n}(x_i))$

$$\text{Alors : } \forall i \in \llbracket 1 \quad n \rrbracket (L_{<n}(x_i) - N_{<n}(x_i) = 0)$$

Et donc le polynôme $\Delta_{<n}(x) = L_{<n}(x) - N_{<n}(x)$ possède les n abscisses des n points distincts

pour racines et donc peut se factoriser sous la forme : $\Delta_{<n}(x) = r_q(x) \prod_{i=1}^n (x - x_i)$

Or : $r_q(x) \neq 0 \Leftrightarrow d^\circ(\Delta_{<n}(x)) = q + n$, ce qui est contradictoire avec le fait que le degré du polynôme différentiel est strictement inférieur à n .

$$\text{Il vient donc que : } r_q(x) = 0 \Rightarrow \Delta_{<n}(x) = 0 \Leftrightarrow L_{<n}(x) = N_{<n}(x)$$

En conclusion, les différentes méthodes d'interpolations se distinguent en termes de procédé de construction, mais produisent toutes le même résultat.

D) Etant donné l'ensemble de points suivants :

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x_i & -1 & -a & 0 & a & 1 \\ y_i & (1-a^2)^2 & 0 & a^4 & 0 & (1-a^2)^2 \end{array} \right)$$

a) En donner le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n y_k l_k(x) = \sum_{k=1}^n y_k \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

$$l_{-2}(x) = \frac{x(x-1)(x^2-a^2)}{2(1-a^2)} \quad l_{-1}(x) = \frac{x(x-a)(x^2-1)}{2a^2(a^2-1)} \quad l_0(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-a^2)}{a^2}$$

$$l_1(x) = \frac{x(x+a)(x^2-1)}{2a^2(a^2-1)} \quad l_2(x) = \frac{x(x+1)(x^2-a^2)}{2(1-a^2)}$$

Pour éviter de perdre (beaucoup trop de) votre temps à distribuer, simplifier puis re factoriser, il s'agit de jouer à fond la carte des symétries remarquables.

$$L_4(x) = (1-a^2)^2 (l_{-2}(x) + l_2(x)) + a^4 l_0(x) =$$

$$\frac{(1-a^2)^2}{2(1-a^2)} x(x^2-a^2)(x-1+x+1) + \frac{a^4}{a^2} (x^2-1)(x^2-a^2) =$$

$$(1-a^2)x^2(x^2-a^2) + a^2(x^2-1)(x^2-a^2) = (x^2-a^2)((1-a^2)x^2 + a^2(x^2-1)) = (x^2-a^2)^2$$

b) En donner le polynôme d'interpolation de Newton

Pour réduire la complexité des calculs dans la mise en œuvre de la méthode de Newton, procé-

dons à un changement de variable : $\begin{cases} \alpha = 1+a \\ \beta = 1-a \end{cases}$ et donc $1-a^2 = \alpha\beta$