

Algo 1
TD2 : Exercice d'affinité et d'approximation

Exercice 1 :

Les deux points : 2^{m_1} et $4,00 \pm 2^{m_2}$ ($2^{m_1} (1, 2^{m_2})$)

$$\text{Ecart absolu} = |x_1 - x_2| = 2^{m_1} (1, 2^{m_2}) = 2^{m_1}$$

$$\text{Ecart relatif} = \frac{\text{Ecart absolu}}{x_1 + x_2} = \frac{2^{m_1}}{2^{m_1}} = 1$$

$$\text{Les deux points} \Rightarrow \frac{1}{1} \pm \frac{1}{1} = 2^{m_1 - m_2} (1, 1) = 2^{m_1 - m_2} (1, 2^{m_2})$$

$$\Rightarrow 1 \pm 1 = 2^{m_1} (1, 2^{m_2})$$

$$\text{Ecart absolu} = 2^{m_1} + 2^{m_2} = 2^{m_1}$$

$$\text{Ecart relatif} = \frac{2^{m_1}}{2^{m_1} + 2^{m_2}} \Rightarrow 2^{m_2} < 2^{m_1} < 2^{m_2 + 1}$$

Proche de celle trouvée précédemment. Donc E_n est à peu près est.

Exercice 2

$$\begin{aligned} |a - \hat{a}| &= 2^n (1, a_1, a_2, \dots, a_n - 1, a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= 2^n (0, 0, \dots, 0, a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= 2^{n-k} (0, a_1, a_2, \dots, a_n) \times \frac{|a|}{|a|} \\ &= 2^{n-k} \frac{0, a_1, a_2, \dots, a_n}{1, a_1, a_2, \dots, a_n} \times |a| \\ &= 2^{n-k} \left(\frac{0, a_1, a_2, \dots, a_n}{1, a_1, a_2, \dots, a_n} \right) |a| \end{aligned}$$

Donc

$$|a - \hat{a}| \leq 2^{n-k} |a|$$

$$\left. \begin{aligned} 0, a_1, a_2, \dots, a_n &\leq 0, 11 \dots 1 \\ 1, a_1, a_2, \dots, a_n &\geq 1, 0 \dots 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |a| \leq 1$$

$$\Delta = 12 - 4 \times 10^{-3} = 11.996 \approx 12 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \frac{0.6 + 1.4}{2.0} \approx \frac{0.1 + 0.1}{2.0 \times 10^4} + 4.6 \times 10^3 \approx 8 \times 10^3$$

$$x_{\text{HCl}} = \frac{2}{2+10^3} \approx \frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^3} \approx 2 \cdot 10^{-6} \approx 2 \cdot 10^{-3} \%$$

En elle prison sentant de 52 bits / 1700 et à peu près
concrete

TD3: Resultat de l'apt. l'ind.

54

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 40 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} 14 \\ 2\frac{1}{2} \\ 10\frac{1}{5} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & -1 & -12 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix}$$

— — —

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & -3 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{matrix} -8 \\ 2 \\ -25 \\ -40 \end{matrix}$$

24

—

1

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ex 2: 1) méthode de Gauss 2) méthode de Jacobi

1)
$$\begin{pmatrix} 10^3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{10^3} L_1$$

$10^3 = 1000$
 $n = 10^3$

$$\begin{pmatrix} 10^3 & 1 \\ 0 & -10^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 10^3 \end{pmatrix}$$

D'où
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$0 + 1 = 2 \quad \text{OK}$

2) méthode de Gauss
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 10^{-4} L_1$$

$10^{-4} = 0.0001$
 $n = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où
$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \quad \checkmark$$

Ex 4: P_3 est une matrice carrée 3×3 avec des coefficients réels. On veut résoudre $P_3 X = I$.

Gauss: $A \underset{\text{matrice}}{X} = \underset{\text{vecteur}}{b}$, on veut $A A^{-1} = I$

D'où faire col par col $AX = I$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = I \quad \Rightarrow \quad A x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_1$$

Effectuer G. pour les col de X.

Ex 5: Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matrice à diagonale dominante, G.S. converge.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{12 - (1-1)x_2^{(k)}}{4} = 1 - x_2^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1 - (1-1)x_1^{(k)} - (-2)x_1^{(k)}}{4}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{5 - 1 \cdot x_1^{(k)} - (-2)x_1^{(k)}}{4}$$

k=0 $x_1^{(0)} = 3$

$x_2^{(0)} = 0.5$

$x_3^{(0)} = 0.45$

k=1

$x_1^{(1)} = 2.99$

$x_2^{(1)} = 0.993$

$x_3^{(1)} = 1.00$

k=2

$x_1^{(2)} = 2.94$

$x_2^{(2)} = 0.959$

$x_3^{(2)} = 0.945$

k=3

$x_1^{(3)} = 3$

$x_2^{(3)} = 1$

$x_3^{(3)} = 1$

→ da dist

k=4

$x_1^{(4)} = 2.98$

$x_2^{(4)} = 0.967$

$x_3^{(4)} = 0.983$

k=5

$x_1^{(5)} = 3$

$x_2^{(5)} = 1$

$x_3^{(5)} = 1$



k=6

$x_1^{(6)} = 2.99$

$x_2^{(6)} = 0.993$

$x_3^{(6)} = 0.991$