

Abaque de Smith

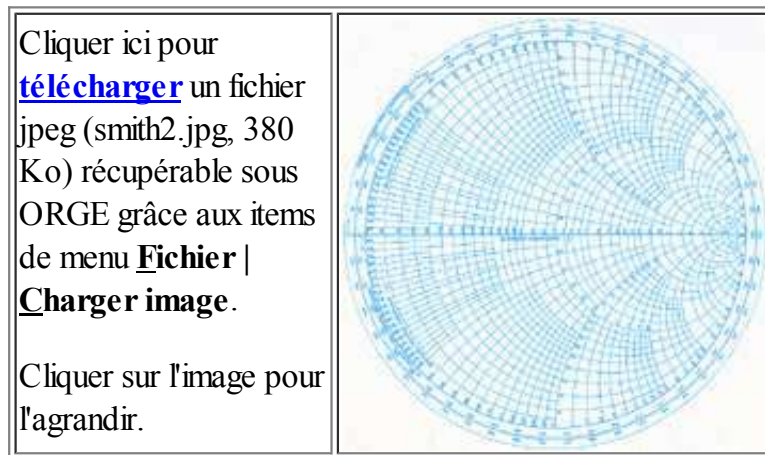
Soit f la [transformation de Smith](#) :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z' = f(z) = \frac{z-1}{z+1} \end{cases}$$

On note φ la transformation géométrique associée qui à tout point M d'affixe z ($z \neq -1$) associe le point M' d'affixe z' .

Dans l'étude des [lignes de transmission](#), on a toujours $|z'| = |(z-1)/(z+1)| \leq 1$ car $\text{Re}(z) \geq 0$.

L'**abaque de Smith** représente donc la fonction f en ne retenant que les arcs de cercles contenus à l'intérieur du disque de centre O et de rayon égal à 1. Ces cercles représentent en général les images des droites (Δ_a) pour a allant de 0 à 20 (a désignant des résistances réduites qui ne peuvent être que positives) et les images des droites (D_b) pour b allant de -20 à +20 (b désignant des réactances réduites).



Cet abaque possède deux propriétés importantes pour l'étude des lignes de transmission.

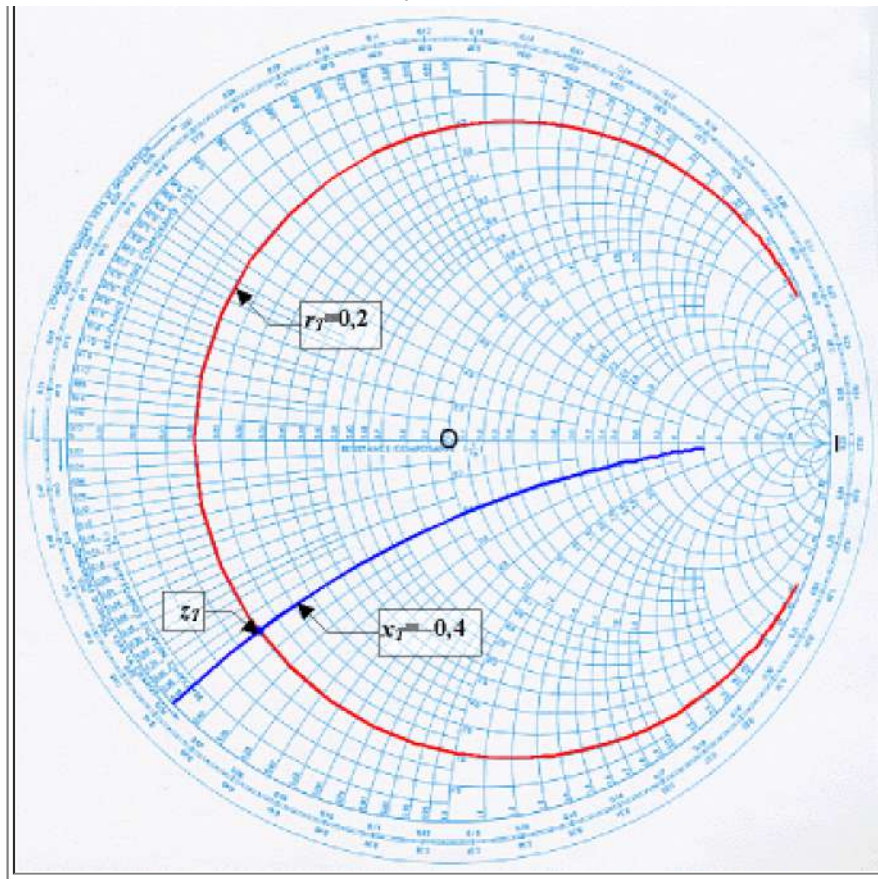
D'une part, il permet de déterminer approximativement z' connaissant z , mais aussi z connaissant z' , ce qui correspond à l'abaque de la fonction réciproque $z = f^{-1}(z') = (1+z')/(1-z')$.

D'autre part, comme $f(1/z) = ((1/z)-1)/((1/z)+1) = (1-z)/(1+z) = -f(z)$, les points P d'affixe $f(z)$ et P' d'affixe $f(1/z)$ sont donc symétriques par rapport à O . Ceci permet de passer facilement sur l'abaque d'un raisonnement "en tension" sur des impédances z à un raisonnement "en courant" sur des admittances $y=1/z$.

a) positionnement d'une impédance réduite

Soit $z_T = r_T + jx_T$ une impédance réduite donnée. On représente cette impédance dans l'abaque de Smith par le point, noté z_T , situé à l'intersection du cercle de résistance coté r_T et du cercle de réactance coté x_T . Par construction même de l'abaque, ce point a pour affixe $\rho_T = ((z_T - 1)/(z_T + 1))$. Par conséquent, ses coordonnées polaires donnent immédiatement le **module et l'argument du coefficient complexe de réflexion en tension au niveau de la charge** :

$$\left\| \overrightarrow{Oz_T} \right\| = |\underline{\rho}_T| = \rho_T \text{ et } \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{Oz_T} \right) = \arg(\underline{\rho}_T) = \phi_T.$$



b) cercle des réactances réduites pures

Si $z_T = jx_T$ (réactance réduite pure), le point z_T se trouve à l'intersection du cercle de résistance $r_T=0$ et du cercle de réactance x_T . L'image par ϕ de la droite d'équation $x=0$ étant le cercle de centre O et de rayon 1, l'ensemble des réactances réduites pures est donc représenté, dans l'abaque de Smith, par ce cercle dit "cercle des réactances réduites pures".

Si x_T est positif, z_T est sur le demi-cercle supérieur ; si x_T est négatif, z_T est sur le demi-cercle inférieur. Pour $x_T=0$, z_T est confondu avec le point A(-1;0) et lorsque $x_T \rightarrow \pm\infty$, z_T tend vers le point I(1;0).

c) axe des résistances réduites pures

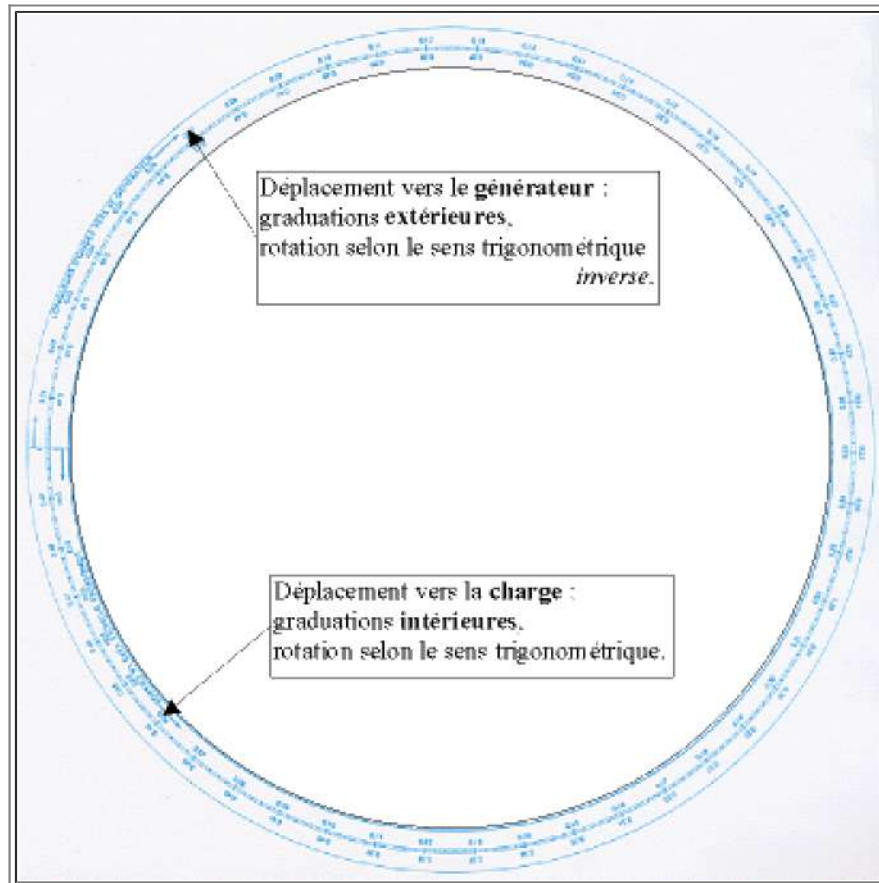
Si $z_T = r_T$ (résistance réduite pure), le point z_T se trouve à l'intersection du cercle de résistance r_T et de la droite de réactance $x_T=0$. L'image par ϕ de la demi-droite positive d'équation $y=0$ étant le segment [AI], l'ensemble des résistances réduites pures est donc représenté, dans l'abaque de Smith, par ce segment dit "axe des résistances réduites pures".

Pour $r_T=0$, z_T est confondu avec le point A(-1;0). Pour $r_T=1$, z_T est confondu avec l'origine O. Lorsque $r_T \rightarrow +\infty$, z_T tend vers le point I(1;0).

d) échelle des distances réduites

Le déplacement le long de la ligne à une distance d de la charge rend nécessaire de trouver sur l'abaque une échelle des distances. L'intérêt d'une échelle indépendante de la longueur d'onde conduit tout naturellement à une échelle dite des distances réduites, c'est-à-dire en d/λ où d est la distance réelle et λ la longueur d'onde de la ligne de transmission étudiée.

Cette échelle sans dimension est reportée sur un cercle dit des distances réduites (voir figure ci-dessous), doublement gradué entre 0 et 0,5 pour un tour complet (0 à $\lambda/2$ pour une distance réelle ; les phénomènes étudiés étant périodiques de période $\lambda/2$).



Cette graduation permet d'établir une correspondance directe entre réactance réduite pure et distance réduite. En effet, pour une ligne fermée par un court-circuit $Z_T=0$, l'impédance complexe de charge ramenée $Z(d)$ est égale à $jR_c \tan 2\pi(d/\lambda)$ et l'impédance réduite est donc imaginaire pure de la forme $z(d)=jx(d)$ avec la réactance réduite $x(d)$ égale à $\tan 2\pi(d/\lambda)$.

A chaque graduation (d/λ) du cercle des distances réduites correspond donc une graduation $x(d)$ du cercle des réactances réduites pures.

e) lieu de variation de l'impédance de charge ramenée

On sait qu'à une distance d quelconque, variant de 0 (charge) à ℓ (entrée de la ligne), l'impédance complexe de charge réduite ramenée a même module que z_T et un argument décalé de $-4\pi d/\lambda$ radians ou $-720d/\lambda$ degrés.

Dès qu'on a positionné le point z_T représentant l'impédance de charge réduite ramenée, on peut donc tracer le lieu de variation de l'impédance de charge réduite ramenée, c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon Oz_T ; ce cercle coupe l'axe des résistances réduites pures aux points M et N (voir figure ci-dessous).

L'abaque de Smith permet de déduire le comportement (inductif ou capacitif) de cette impédance de charge ramenée à une distance d quelconque variant de 0 à ℓ .

f) représentation des tensions incidentes, réfléchies et résultantes

La représentation vectorielle de Fresnel avec l'abaque de Smith amène :

→ d'une part, à normaliser les trois tensions (incidente v_i , réfléchie v_r et résultante v) par rapport à l'amplitude maximale de la tension incidente, c'est-à-dire à diviser les amplitudes maximales respectives par l'amplitude maximale de la tension incidente : $V_i/\sqrt{2}$. Les représentations graphiques de ces trois tensions dans l'abaque de Smith ont donc des amplitudes indépendantes de l'amplitude maximale de la tension incidente qui ne peut donc être déterminée que par le calcul.

→ d'autre part, à prendre la phase de la tension incidente normalisée comme référence des phases en

effectuant un décalage temporel de $-2\pi t/T$ et un décalage spatial de $-2\pi d/\lambda$.

On aboutit, pour les tensions ainsi normalisées, à l'expression : $v_N(d) = v_{IN}(d) + v_{TN}(d) = 1 + |\rho_T| \cos(\varphi_T - 4\pi d / \lambda)$.

Géométriquement (voir figure ci-dessous) :

1. la tension incidente normalisée, définie par $v_{IN}(d)=1$, est donc représentée par le vecteur

$$\overrightarrow{v_{\text{gN}}} = \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AO} \text{ ,}$$

2. la tension réfléchie normalisée, définie par $v_{TN}(d) = |\rho_T| \cos(\phi_T - 4\pi d/\lambda)$, est représentée par le vecteur

$$\overrightarrow{v_{rN}(d)} = \overrightarrow{Oz_d} \text{ ,}$$

3. la tension résultante normalisée, définie par $v_N(d) = v_{IN}(d) + v_{rN}(d)$, est représentée par le vecteur

$$\overrightarrow{v_M(d')} = \overrightarrow{v_{3M}(d')} + \overrightarrow{v_{2M}(d')} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{Oz_d} = \overrightarrow{Az_d}.$$

