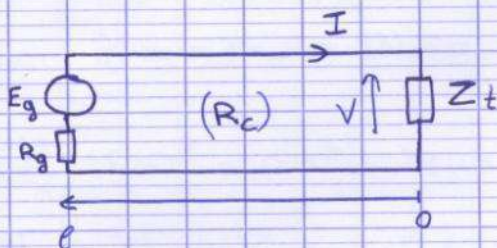


Canaux de transmission TD n°1

Ex.1: impédance ramenée et ondes stationnaires



$$V(l) = A \cdot e^{j\beta l} + B \cdot e^{-j\beta l}$$

$$V(l, t) = \text{Re} [V(l) e^{j\omega t}]$$

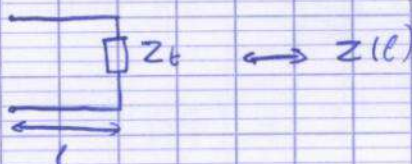
$$I(l) = \frac{1}{R_c} [A e^{j\beta l} - B e^{-j\beta l}]$$

Ligne sans perte: $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$ résistance caractéristique de la ligne.

$$\beta = \omega \sqrt{LC}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$Z(l) = \frac{V(l)}{I(l)}$$



Rq: $Z(0) = Z_t = \frac{A+B}{A-B} \cdot R_c = \frac{1+B/A}{1-B/A} \cdot R_c$

$$Z(l) = \left(\frac{A \cdot e^{j\beta l} + B \cdot e^{-j\beta l}}{A e^{j\beta l} - B \cdot e^{-j\beta l}} \right) \times R_c \quad \text{en fonction de } Z_t, R_c, \beta, l$$

$$Z(l) = R_c \cdot \frac{e^{j\beta l} + \frac{B}{A} \cdot e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \frac{B}{A} \cdot e^{-j\beta l}}$$

$$Z(l) = R_c \cdot \frac{e^{j\beta l} (Z_t + R_c) + (Z_t - R_c) e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} (Z_t + R_c) - (Z_t - R_c) e^{-j\beta l}}$$

$$= R_c \cdot \frac{(Z_t + R_c)(\cos(\beta l) + j \sin(\beta l)) + (Z_t - R_c)(\cos(\beta l) - j \sin(\beta l))}{(Z_t + R_c)(\cos(\beta l) + j \sin(\beta l)) - (Z_t - R_c)(\cos(\beta l) - j \sin(\beta l))}$$

$$= R_c \cdot \frac{j Z_t \cos(\beta l) + j R_c \sin(\beta l)}{j R_c \cos(\beta l) + j Z_t \sin(\beta l)}$$

Or $\frac{B}{A} = \frac{Z_t - R_c}{Z_t + R_c} = \Gamma$

$$Z(l) = R_c \cdot \frac{e^{j\beta l} + \frac{Z_t - R_c}{Z_t + R_c} e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \frac{Z_t - R_c}{Z_t + R_c} e^{-j\beta l}}$$

$$Z(l) = \frac{Z_t + j R_c \tan(\beta l)}{1 + j \frac{Z_t}{R_c} \tan(\beta l)} \quad \text{de période } \frac{\lambda}{2}$$

2) a) Si $Z_t = 0$, $Z_0(l) = jR_c \tan(\beta l) = jX$
 $\rightarrow$ court-circuit.

$Z(l)$ est imaginaire pur

$\Rightarrow$  $X > 0$, $Z_0(l)$ est une inductance

 $X < 0$, $Z_0(l)$ est une capacité

$$\beta l = \frac{2\pi l}{\lambda}$$

$$0 < \beta l < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{2\pi l}{\lambda} < \frac{\pi}{2}$$

$$Z_0(l) > 0 \Leftrightarrow \text{Inductance} \Leftrightarrow 0 < l < \frac{\lambda}{4} \quad (0 < \beta l < \frac{\pi}{2})$$

$$Z_0(l) < 0 \Leftrightarrow \text{Capacité} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$$

$$Z_0(0) = 0 \Leftrightarrow \text{court-circuit} (l=0)$$

$$Z_0\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \infty \Leftrightarrow \text{résistance} \quad \beta l = \frac{\pi}{2}$$

b) Si $Z_t = +\infty$ ^{terminaison de la ligne est un} (circuit ouvert) $Z_0(l) = -\frac{jR_c}{\tan(\beta l)} = -jR_c \cot(\beta l)$
 $(Z(l) \text{ imaginaire pur également})$

$$Z_0(0) = \infty \quad l=0$$

$$Z_0\left(\frac{\lambda}{4}\right) = 0 \quad l = \frac{\lambda}{4} \quad \beta l = \frac{\pi}{2}$$

$$Z_0(l) < 0 \Leftrightarrow \text{capacité} \Leftrightarrow 0 < l < \frac{\lambda}{4}$$

$$Z_0(l) > 0 \Leftrightarrow \text{inductance} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$$

Exercice 2: Mesure sur une ligne

1) Deux minima consécutifs de tension ont un écart de 20 cm $\Rightarrow \lambda = 40$ cm

vitesse de propagation: $v = \lambda f = 0,4 \cdot 2,5 \cdot 10^8 = 1 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Rappel: $\Gamma = \frac{B}{A} = \rho \cdot e^{j\varphi}$ $0 \leq \rho \leq 1$ car onde réfléchie - puissance que onde de départ

$$V(\ell) = A e^{j\beta \ell} + B e^{-j\beta \ell} = A e^{j\beta \ell} (1 + \Gamma e^{-2j\beta \ell})$$

$$|V(\ell)| = |A| |1 + \rho e^{j(\varphi - 2\beta \ell)}|$$

$$V_{\min} \leq |V(\ell)| \leq V_{\max}$$

$$|A| (1 - \rho) \leq |V(\ell)| \leq |A| (1 + \rho)$$

$$|V(\ell)| = V_{\min} \text{ quand } \varphi - 2\beta \ell = \pi - 2k\pi$$

$$\ell_n = \frac{\varphi_0}{2\pi} \lambda + \frac{k\lambda}{2}$$

2 minima de tension sont séparés par $\lambda/2$.

$$\Rightarrow \lambda = 2 \times 20 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$$

$$v = 1 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{3}$$

très vrai

$$\epsilon_r \mu_r = \left(\frac{c}{v}\right)^2 = 9$$

$$\mu_r = 1 \Rightarrow \epsilon_r = 9$$

ϵ_r = permittivité diélectrique des isolants

μ_r = perméabilité magnétique des conducteurs

2) ROS: Rapport des ondes stationnaires

$$ROS = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

$$\text{ici } ROS = 3 \Leftrightarrow 1 + \rho = 3(1 - \rho) \Leftrightarrow 4\rho = 2 \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma = \frac{Z_t - R_c}{Z_t + R_c} \quad Z_t = R_t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Gamma \text{ réel}$$

$$|\Gamma| = \rho \quad \Gamma \text{ est réel} \Rightarrow \Gamma = \rho \text{ ou } -\rho$$

$$\Gamma = \pm 1/2$$

$$\frac{R_t - R_c}{R_t + R_c} = \pm \frac{1}{2}$$

1^{er} cas : $\Gamma = 1/2$ $R_t - R_c = \frac{1}{2}(R_t + R_c)$

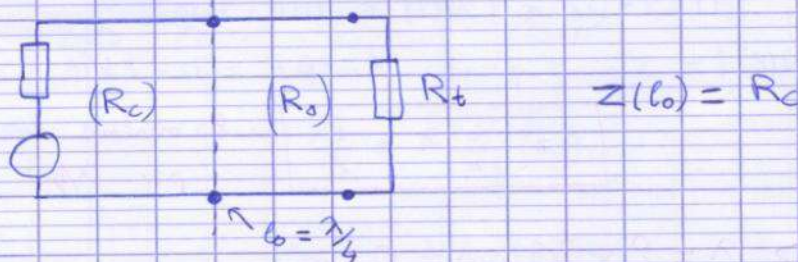
$$\frac{1}{2} R_t = \frac{3}{2} R_c \Rightarrow \boxed{R_t = 300 \Omega}$$

2^{ème} cas : $\Gamma = -1/2$ $R_t - R_c = -\frac{1}{2}(R_t + R_c)$

$$\frac{3}{2} R_t = \frac{1}{2} R_c \Rightarrow \boxed{R_t = 38,3 \Omega}$$

Rmq : Si $\Gamma = 1$, tte l'onde est réfléchiée.

On veut $\Gamma = 0$, pour que la charge absorbe tte l'onde réfléchiée.



On adapte la ligne en ayant $Z(l_0) = R_c$

$$Z(l_0) = \frac{R_t + jR_0 \tan(\beta l_0)}{R_0 + jR_t \tan(\beta l_0)} \cdot R_0$$

$$l_0 = \lambda/4 \quad \beta l_0 = \frac{\pi}{2} \quad \tan(\beta l_0) = \pm \infty$$

$$Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{R_0^2}{R_t}$$

On choisit $Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) = R_c$ (pour avoir d'onde réfléchiée)

$$\frac{R_0^2}{R_t} = R_c \quad R_0 = \sqrt{R_c R_t}$$

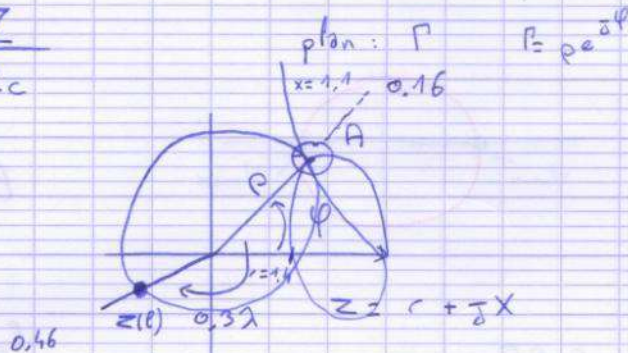
Exercice 3: Abaque de SMITH



$$Z = \frac{Z}{R_c}$$

Γ = coef. de réflexion

$$Z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$



$$r = 1.4$$

$$x = 1.1$$

$$\boxed{\begin{aligned} Z_t &= \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \\ \Gamma(l) &= \Gamma \cdot e^{-2\beta l} \\ Z(l) &= \frac{1 + \Gamma(l)}{1 - \Gamma(l)} \end{aligned}}$$

Principe

On a $Z_t = 1.4 + j1.1$ sur l'abaque, on a $Z(l)$.

$$1) R_c = 50 \, \Omega \quad Z_t = (30 - j55) \, \Omega$$

$$z_t = \frac{Z_t}{R_c} = 0.6 - j1.1$$

$$\rho \approx 0.58 \quad ROS \approx 4$$

2) Trouver l'impédance ramenée à 11 cm de la charge

$$Z(l) = \quad l = 11 \text{ cm}$$

$$\lambda = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{l}{\lambda} = 1.375$$

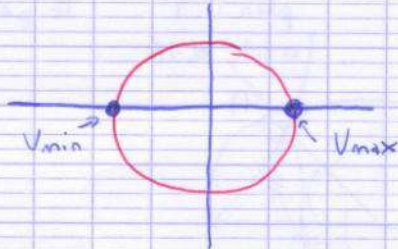
$$Z(l) = Z(0.375 \lambda)$$

car Z périodique en $\frac{\lambda}{2}$

$$\begin{aligned} &0.355 \\ &+ 0.375 \\ &\hline &0.730 \end{aligned} = 0.230 \text{ car périodique en } 0.5$$

$$\text{donc } Z(l) = 3.2 + 1.4 j \text{ pour } l = 11 \text{ cm.}$$

3) Pour trouver les minimums et maximums de tension :



$$Z_{\min} = 0,25$$

$$Z_{\max} = 4$$

$$l_{\min} = 0,145 \lambda + k \frac{\lambda}{2}$$

$$= 1,16 \text{ cm} + k \times 4 \text{ cm}$$

$$l_{\max} = 0,365 \lambda + k \frac{\lambda}{2}$$

$$= 3,16 \text{ cm} + k \times 4 \text{ cm}$$

Exercice 4 :

1) $\lambda = 1 \text{ m}$
 $x_n = 34,8 \text{ cm}$

$$\text{ROS} = \frac{1-p}{1+p} \quad (\text{ROS} \leftrightarrow p)$$

$$Z = \frac{Z_t}{R_c}$$

$$34,8 \text{ cm} = 0,348 \lambda$$

$$Z = 0,85 + 0,98 j$$

$$1\lambda = 1 \text{ m}$$

$$0,348\lambda = 34,8 \text{ cm}$$

(xR_c)

$$Z_t = 42,5 - 49 j$$

2) Longueur de la ligne: $l = 1,45 \text{ m}$

$$\frac{l}{\lambda} = 1,45$$

$$Z(l) = 1,45 Z - 1,45 j$$

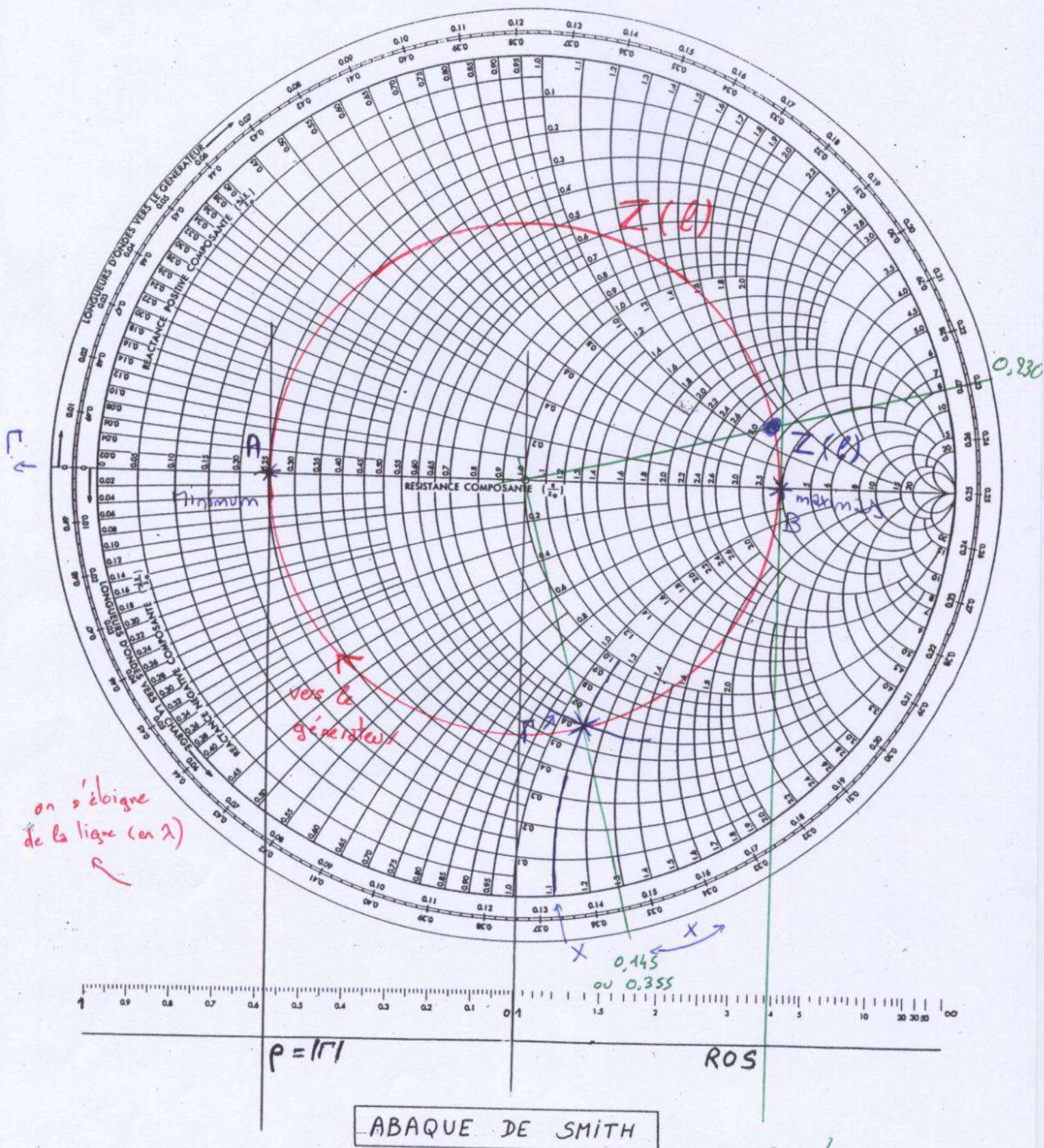
$$Z(l) = 0,53 + 0,6 j$$

$$= 26,5 + 30 j \Omega$$

Exercice 3 :

$$A: \Gamma = -\rho$$

$$B: \Gamma = +\rho$$



on s'éloigne
de la ligne (en λ)

$$\rho = |\Gamma|$$

ROS

ABaque DE SMITH

$$ROS \approx 4$$

$$\rho = \text{rayon du cercle rouge} \\ = |\Gamma|$$

A : minimum de tension
B : maximum de tension

A: minimum de tension
B: maximum de tension

